Identidades Trigonométricas

Muchos problemas involucran uno o más ángulos para resolverlos; incluso, existen problemas que incluyen una o más funciones trigonométricas. Estas estructuras matemáticas pueden ser identidades o ecuaciones. Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas que puede incluir funciones (incluyendo trigonométricas), y que puede o no tener solución; una identidad es una expresión que es verdadera para todos los valores de la variable para los que tiene sentido.

Identidades pitagóricas

A partir de una circunferencia con radio unitario y el teorema de Pitágoras, se definen las siguientes identidades:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

Identidades sobre variaciones del ángulo

En varias ocasiones los ángulos a los que se les aplican las funciones trigonométricas pueden estar sujetos a operaciones aritméticas, tales como sumas, productos, entre otros.

Para suma y resta de ángulos se tienen:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

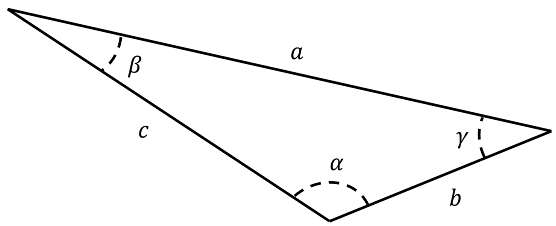
A partir de las identidades anteriores se particularizan las siguientes:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha\,, \qquad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Ley de los Senos; Ley del Coseno

Sea un triángulo cualquiera como el mostrado



La ley de los senos relaciona los lados y los ángulos de la siguiente manera:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Mientras tanto, la del coseno los relaciona como

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Ecuaciones Trigonométricas

La resolución de ecuaciones con una variables varía dependiendo del grado de la ecuación; los métodos de resolución van desde despeje, resolución de polinomios o métodos numéricos. En el caso de ecuaciones con funciones trigonométricas, se requiere el uso de las identidades, incluyo de las leyes de los senos y el coseno.

EJEMPLO. La solución de la ecuación trigonométrica

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$$

permite el uso de la identidad del seno de la suma de ángulos:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$$
$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1$$
$$\sin x \cos 60° + \cos x \sin 60° = 1$$
$$\sin(x + 60°) = 1$$
$$x + 60° = \arcsin 1$$
$$x + 60° = 90°$$
$$x = 30° + 360k°$$

La solución de esta ecuación debe considerar varias vueltas de $360°$, ya que todos esos ángulos definen el mismo lugar.

Al verificar la ecuación con el ángulo principal:

$$\sin 30° + \sqrt{3}\cos 30° = 2$$
$$\frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$
$$\frac{4}{2} = 2$$

Lo mismo sucederá con cualquier ángulo del conjunto solución de la ecuación.