Matrices y Determinantes

Definición de matriz

Matriz

Una matriz es un ente matemático equivalente a una tabla; es decir, es un arreglo de elementos de cualquier naturaleza (aunque, en general, suelen ser números) cuya estructura está organizada en renglones y columnas.

Matemáticamente, se llama matriz de m por n a un conjunto rectangular de elementos a_{ij}, dispuestos en m renglones y en n columnas; una matriz con estas características tiene la forma

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las matrices se denotan con letras mayúsculas; por ejemplo, las matrices A, B ó C. Los elementos de las matrices se representan con letras minúsculas y subíndices que indican el lugar ocupado dentro de la matriz; por ejemplo, los elementos a_{ij}, b_{ij} y c_{ij}, pertenecen a las matrices A, B y C, respectivamente. La notación de los elementos de una matriz permite obtener una nueva representación para la matrices; en general, una matriz también pude escribirse como

$$A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$$

El número de columnas y renglones de una matriz informan sobre una propiedad importante conocida como orden, dimensión o tamaño; es decir, el orden se define con el número de renglones por el número de columnas.

EJEMPLO 6.1. Sean las matrices A, B y C.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -9 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene tres renglones y tres columnas, por lo que su orden es 3×3; la matriz B tiene un orden 3×4; en tanto, la matriz C tiene un orden 2×1.

Igualdad de matrices

Al igual que los conjuntos numéricos o los polinomios, es posible definir la igualdad de matrices.

Sean las matrices

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}, \qquad B=\left(b_{ij}\right)_{p\times q}$$

Se dice que $A = B$, si y sólo si $m = p$, $n = q$ y $a_{ij} = b_{ij}$; es decir, la igualdad entre dos matrices se cumple si tienen el mismo orden, y además, el elemento que ocupa el renglón i y la columna j es el mismo en ambas matrices.

EJEMPLO 6.2. Sean las matrices W, X, Y, y Z.

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices W y X no son iguales, ya que el elemento w_{22} es diferente del elemento x_{22}, aún cuando tienen el mismo orden; las matrices X y Y sí son iguales, debido a que tienen el mismo orden, y el elemento x_{ij} es igual al elemento y_{ij}; finalmente, las matrices Y y Z no son iguales, ya que su orden es diferente.

Operaciones con matrices

Las reglas que rigen las operaciones con matrices son similares a las establecidas en los campos numéricos ordinarios; la diferencia radica al utilizan tablas y sus correspondientes elementos, en lugar de números.

Adición

Dadas dos matrices A y B, del mismo orden m por n, su suma es una matriz de orden m por n, calculada sumando cada uno de los elementos homólogos de las matrices A y B; es decir,

$$A + B = C$$
$$\left(a_{ij}\right)_{m\times n} + \left(b_{ij}\right)_{m\times n} = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m\times n}$$

EJEMPLO 6.3. Sean las matrices $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 7 & -8 & 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. La suma de P y Q se calcula del siguiente modo:

$$\begin{aligned} P + Q &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 7 & -8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En tanto que, la suma $P + R$ y la suma $Q + R$ no existen, ya que el orden de P y Q (2×3) no es el mismo que el orden de R (1×3). En este caso, se dice que las matrices P y R (o Q y R) son inconsistentes para la suma.

La suma de matrices posee propiedades importantes, que son equivalentes a la suma numérica tradicional. Dadas las matrices A, B y C, las tres de orden $m \times n$, entonces se cumple

- ✓ La asociación $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- ✓ La conmutación $A + B = B + A$.
- ✓ La existencia del elemento neutro $A + O = A$.
- ✓ La existencia del elemento inverso $A + (-A) = O$.

La sustracción de matrices se cumple como un caso especial de la adición; es decir, dadas dos matrices A y B, su sustracción se obtiene como

$$A - B = A + (-B)$$

Multiplicación

El producto dentro de las matrices presenta dos importantes variantes: el producto de matrices y el producto de una matriz por un escalar. Ambas variantes son uno de los aspectos en los cuales las operaciones con matrices se diferencian de las operaciones clásicas en los conjuntos numéricos, específicamente de la multiplicación.

Multiplicación por un escalar

Dados una matriz A de orden $m \times n$ y un elemento numérico c (conocido como escalar), el producto $c \cdot A$ se calcula al multiplicar el escalar por cada uno de los elementos de A, obteniéndose otra matriz del mismo orden $m \times n$; o sea,

$$\begin{aligned} c \cdot A &= c \cdot \left(a_{ij}\right)_{m\times n} \\ &= \left(c \cdot a_{ij}\right)_{m\times n} \end{aligned}$$

EJEMPLO 6.4. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, y el escalar $c = -2$. Los productos $c \cdot A$ y $c \cdot B$ se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} c \cdot A &= (-2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c \cdot B &= (-2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como se puede observar, el orden de una matriz no importa al momento de realizar el cálculo del producto por un escalar.

Las propiedades del producto de una matriz por un escalar se muestran a continuación. Sean las matrices A y B, y los escalares c y d, entonces se cumple

- ✓ La asociación $(cd) \cdot A = c \cdot (dA)$.
- ✓ La existencia del elemento neutro $c \cdot A = A$, si $c = 1$.
- ✓ La distribución sobre la suma de matrices $c \cdot (A + B) = c \cdot A + c \cdot B$.
- ✓ La distribución sobre la suma de escalares $(c + d) \cdot A = c \cdot A + d \cdot A$.

Es importante destacar que los escalares pueden ser números reales o complejos.

Multiplicación de matrices

La multiplicación de matrices es un caso especial dentro de la naturaleza del concepto de la multiplicación. Dado el producto de dos matrices

$$A \cdot B = C$$

Se dice que la matriz A (en la posición izquierda de la multiplicación) pre-multiplica a la matriz B; en el caso complementario, la matriz B (en la posición derecha de la multiplicación) post-multiplica a la matriz A. Para definir la multiplicación es importante considerar la posición de cada matriz en la operación: el producto de dos matrices sólo puede definirse si el número de columnas de la matriz que pre-multiplica es igual al número de renglones de la matriz que post-multiplica.

Sean una matriz A de orden $m \times n$, y una matriz B de orden $n \times p$. El producto matricial $A \cdot B$ será aquél en el cual cada elemento de la matriz resultante se obtiene al sumar todos los productos del elemento a_{in} de la fila i en la matriz A por el elemento b_{nj} de la columna j de la matriz B; es decir,

$$A \cdot B = C$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kp} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kp} \end{pmatrix} =$$

En la representación anterior el renglón en color rojo se multiplica elemento a elemento por la columna en azul; al finalizar, esos productos resultantes se suman y se obtiene el elemento mostrado en color violeta.

Nótese las siguientes peculiaridades:

- ✓ El número de productos que se deben obtener para encontrar un elemento de la matriz resultante es igual al número de columnas de la matriz que pre-multiplica (o número de renglones de la matriz que post-multiplica).
- ✓ El orden de la matriz resultante tiene el mismo número de renglones de la matriz que pre-multiplica, y el mismo número de columnas de la matriz que post-multiplica; es decir, la matriz C tiene orden $m \times p$.
- ✓ La multiplicación de matrices se basa en el producto punto entre vectores de $\mathbb{R}^n$; es decir, tomando al renglón i de la matriz $A_{i\times j}$ y a la columna k de la matriz $B_{j\times k}$, el elemento c_{ik} resultante es

$$\begin{aligned}(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}) \cdot (b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{jk}) &= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{ij}b_{jk} \\ &= \sum_{n=1}^{j} a_{ij}b_{jk}\end{aligned}$$

EJEMPLO 6.5. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Su producto está dado como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(3) + (0)(2) + (2)(1) & (1)(1) + (0)(1) + (2)(0) \\ (-1)(3) + (3)(2) + (1)(1) & (-1)(1) + (3)(1) + (1)(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

El producto matricial presenta algunas propiedades del producto algebraico ordinario. Sean las matrices A, B y C, entonces se cumple

- ✓ La asociación $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
- ✓ La distribución por la derecha $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.
- ✓ La distribución por la izquierda $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

La conmutación no es una propiedad válida para la multiplicación de matrices, pues en algunos casos se cumple y en otros no.

EJEMPLO 6.6. Tomando las matrices A y B del ejemplo 1.5, se obtuvo el producto correspondiente $A \cdot B$; sin embargo, si se intentase obtener el producto $B \cdot A$ se llegaría a lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3)(1) + (1)(-1) & (3)(0) + (1)(3) & (3)(2) + (1)(1) \\ (2)(1) + (1)(-1) & (2)(0) + (1)(3) & (2)(2) + (1)(1) \\ (1)(1) + (0)(-1) & (1)(0) + (0)(3) & (1)(2) + (0)(1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Evidentemente, no es la matriz obtenida anteriormente; por lo tanto, no es posible decir que el producto matricial es conmutativo.

EJEMPLO 6.7. Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ están relacionadas por la siguiente operación:

$$A \cdot X = B$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si la matriz X se iguala a una incógnita $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, entonces se tendrá lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 \end{pmatrix} =$$

Finalmente, al aplicar la igualdad entre matrices se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & = & -1 \\ -2x_1 & -4x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

cuyo conjunto solución es $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, un sistema de ecuaciones lineales puede ser resultado del producto de dos matrices.

Matrices cuadradas

Una de las características más interesantes de las matrices se presenta cuando el orden de la matriz involucra un número igual de renglones, que de columnas; en este caso, se habla de una matriz cuadrada. Las matrices cuadradas son herramientas muy poderosas al momento de utilizarse dentro del Álgebra Lineal; una de sus aplicaciones directas son los determinantes.

Matriz cuadrada

Sea una matriz A de orden $m \times n$. Se dice que la matriz A es cuadrada si, y sólo si $m = n$; es decir, el número de renglones de A es exactamente igual al número de columnas. En este caso se dice que el orden de la matriz es n por n, o simplemente n.

EJEMPLO 6.8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se sabe que se trata de una matriz cuadrada, ya que posee tres columnas y tres renglones; en este caso, el orden de la matriz es tres.

Las matrices cuadradas poseen tres secciones importantes: el triángulo inferior, el triángulo superior y la diagonal principal. En la figura 6.1 se muestran las tres secciones, ilustradas en diferente color.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Diagonal principal, elementos $a_{ij}, i = j$

Triángulo superior, elementos $a_{ij}, i < j$

Triángulo inferior, elementos $a_{ij}, i > j$

Figura 6.1. Elementos de una matriz cuadrada.

Matriz triangular

Una matriz triangular es una matriz cuadrada cuya característica principal es que uno de sus triángulos, ya sea el inferior o el superior, tiene todos sus elementos iguales a cero. En este caso, se pueden tener dos posibilidades:

- ✓ Si los elementos que están abajo de la diagonal principal son nulos, la matriz se llama triangular superior.
- ✓ Si los elementos que están arriba de la diagonal principal son nulos, la matriz se conoce como triangular inferior.

EJEMPLO 6.9. Dadas las matrices

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 1 & 2 & -i \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se observa que las matrices S y G son matrices triangulares inferiores, ya que todos sus elementos por encima de la diagonal principal son ceros; en tanto que, las matrices X y Y son matrices triangulares superiores, porque todos sus elementos por debajo de la diagonal principal son nulos.

Existen tres propiedades importantes dentro de las matrices triangulares al momento de utilizarlas dentro de las operaciones básicas con matrices. Dichas propiedades dicen que si A y B son dos matrices triangulares superiores (o inferiores) del mismo orden, y α es un escalar, entonces se cumple que:

- ✓ $A + B$ es una matriz triangular superior (o inferior).
- ✓ $\alpha \cdot A$ es una matriz triangular superior (o inferior).
- ✓ $A \cdot B$ es una matriz triangular superior (o inferior).

Matriz diagonal

Dentro de las matrices cuadradas existe la posibilidad que tanto el triángulo inferior como el triángulo superior contengan únicamente elementos nulos. En este caso no se habla de una matriz triangular superior o inferior, sino de una matriz diagonal.

Sea una matriz A de orden n. Se dice que A es una matriz diagonal si, y sólo si $a_{ij} = 0, \forall\, i \neq j$; la matriz se representa como

$$A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}), \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 6.10. Las siguientes matrices son diagonales:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & & & \\ & 0 & & \\ & & -9 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Las operaciones de suma, producto por un escalar y producto matricial con matrices diagonales dan como resultado matrices diagonales.

Definición de traza de una matriz y sus propiedades

Existe una cualidad que trabaja directamente con la diagonal principal de una matriz cuadrada. Dicha cualidad se conoce como traza de una matriz y consiste en sumar todos los elementos de la diagonal principal.

Sea A una matriz cuadrada de orden n. La traza de A es un número que se representa como

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

EJEMPLO 6.11. Sea la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 4i \\ 9i & -3i & 5 & 2 \\ 1+i & -i & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 5i & 4i \end{pmatrix}$$

Su traza se calcula como

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} M &= 2 - 3i - 1 + 4i \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

La traza tiene propiedades importantes al momento de combinarla con las operaciones entre matrices. Sean A y B dos matrices de orden n, y c un escalar. Dichas propiedades son:

- ✓ $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$
- ✓ $\operatorname{tr}(c \cdot A) = c \cdot \operatorname{tr} A$
- ✓ $\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A)$

EJEMPLO 6.12. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y el escalar $c = 3$; además, la operación

$$C = cA + AB - 2BA$$

La traza de la matriz C puede calcularse de dos formas diversas:

1. Se realiza la operación y se obtiene su traza.

$$\operatorname{tr} C = \operatorname{tr}(cA + AB - 2BA)$$

$$\begin{aligned} C &= 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que $\operatorname{tr} C = 22$.

2. Se obtiene la traza de cada matriz y por medio de propiedades se llega a la traza de C.

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} C &= \operatorname{tr}(cA + AB - 2BA) \\ &= \operatorname{tr}(cA) + \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(-2BA) \\ &= c\operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(AB) - 2\operatorname{tr}(AB) \\ &= c\operatorname{tr}(A) - \operatorname{tr}(AB) \end{aligned}$$

$$= 3(5) - (-7)$$

Por lo que se llega a tr $C = 22$, que es el resultado obtenido anteriormente.

Matriz identidad

Dentro de las matrices cuadradas existe una muy particular que permite al producto matricial tener la propiedad de la existencia del elemento neutro; se trata de una matriz diagonal cuyos elementos son iguales a uno. Esta matriz se conoce como matriz identidad.

Se llama matriz identidad de orden n a una matriz cuadrada $I = \left(\delta_{ij}\right)_n$, donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Esta representación en forma de función se conoce como delta de Kronecker. En forma desarrollada, la matriz identidad queda representada como:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

El producto de una matriz A de orden $m \times n$ por una matriz identidad presenta las siguientes propiedades:

- ✓ $A_{m\times n} \cdot I_n = A_{m\times n}$
- ✓ $I_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$

EJEMPLO 6.13. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Se puede verificar que

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, para la segunda matriz se tiene que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

El concepto de matriz identidad plantea la posibilidad de un elemento inverso para la multiplicación de matrices. Dicho elemento cumple que

$$X \cdot A = A \cdot X \Rightarrow I$$

donde I es la matriz identidad, A es una matriz cuadrada invertible (o no-singular) y X es una matriz cuadrada única llamada inversa de A.

Definición y propiedades

Sea una matriz A de orden n. Se dice que la matriz A^{-1} es la inversa de A, si y sólo si

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} \Rightarrow I$$

La relación entre una matriz y su inversa es simétrica; es decir, si una matriz A tiene una matriz inversa B, entonces la matriz B tiene una matriz inversa, que es A.

Es importante mencionar que no todas las matrices cuadradas tienen inversa.

EJEMPLO 6.14. La matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa. Esto se pude demostrar encontrando una matriz incógnita $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, tal que $AX = I$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -x_{11} & -x_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Por la igualdad entre matrices, se puede verificar que la matriz del lado izquierdo de la última expresión no es una matriz identidad. Por lo tanto, se concluye que la matriz A no tiene inversa.

A la matriz que no posee una matriz inversa se conoce como matriz singular; por el contrario, una matriz que tiene una matriz inversa se conoce como matriz no-singular. Por esto, del ejemplo 6.14 se concluye que la matriz A es singular.

Las propiedades de la matriz inversa son muy importantes dentro del álgebra de matrices. Estas establecen que, dados un escalar c y dos matrices A y B no singulares de orden n, entonces:

- ✓ A^{-1} es única.
- ✓ $(A^{-1})^{-1} = A$
- ✓ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- ✓ $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}, c \neq 0$

La unicidad de la matriz identidad se puede demostrar fácilmente, haciendo uso de las propiedades del producto matricial. Sea una matriz A no-singular de orden n, y B_1, B_2 dos matrices inversas de A; entonces, se sabe que

$$AB_1 = B_1A \Rightarrow I_n \qquad\qquad AB_2 = B_2A \Rightarrow I_n$$

Tomando en cuenta estas consideraciones, entonces la demostración puede establecerse como:

$$\begin{aligned} B_1 &= B_1 I_n \\ &= B_1(AB_2) \\ &= (B_1A)B_2 \end{aligned}$$

$$= I_n B_2$$
$$B_1 = B_2$$

Lo cual implica que la matriz inversa de A es única.

Cálculo de la inversa por transformaciones elementales

Una matriz inversa puede obtenerse a partir de una matriz A dada, utilizando transformaciones elementales entre los renglones de la matriz A. Estas transformaciones se utilizan para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales; consiste en realizar una de las tres siguientes operaciones:

- ✓ Intercambiar un renglón por otro: $R_i \leftrightarrow R_j$
- ✓ Multiplicar un renglón por un escalar no nulo: $R_i \to kR_i$
- ✓ Sustituir un renglón con la suma de él mismo más otro renglón: $R_i \to R_j + R_i$

Estas operaciones tienen como base un concepto llamado matriz elemental.

Si a una matriz A se le aplica una transformación elemental e, entonces el resultado obtenido será otra matriz A_1 tal que $A_1 = e(A)$. Si ahora se aplica la transformación e a la matriz identidad, se obtiene una matriz $E = e(I)$ llamada matriz elemental.

EJEMPLO 6.15. Para las transformaciones elementales $R_2 \leftrightarrow R_1$, $R_1 \to -2R_1$ y $R_3 \to 2R_2 + R_3$ aplicadas sobre la matriz identidad de orden tres, se tiene que las matrices elementales son, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Una transformación elemental e en una matriz A de orden $m \times n$ puede obtenerse al premulticar la matriz elemental E correspondiente a e por la matriz A; es decir, si $E = e(I_m)$, entonces

$$e(A) = EA$$

Las matrices elementales tienen la característica de ser no-singulares, y que además el producto de dos matrices elementales es una matriz no-singular.

La matriz identidad puede generar matrices no-singulares por medio de aplicar sucesivamente varias transformaciones elementales. Esto quiere decir, que si a una matriz no-singular se le aplican varias transformaciones elementales, se puede obtener la matriz identidad.

Supóngase que A es una matriz cuadrada no-singular y puede reducirse a la matriz identidad por medio de transformaciones elementales. Si la matriz E_q representa a la transformación e_q realizada sobre A, entonces se tiene que

$$E_q \dots E_3 E_2 E_1 A = I$$
$$(E_q \dots E_3 E_2 E_1)A =$$

Por lo tanto, se observa que $A^{-1} = E_q \dots E_3 E_2 E_1$. Esto quiere decir que la matriz inversa de A puede obtenerse al realizar una serie de transformaciones elementales sobre la matriz identidad.

Este método es el mismo que se utiliza para encontrar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales; es decir, sigue las indicaciones del método de Gauss. La única variante es el arreglo matricial que se escalonará. Los pasos del método son:

1. Se construye un arreglo matricial M de orden $n \times 2n$, en donde la parte izquierda será la matriz A y la parte derecha será la matriz identidad; es decir, se tiene $M = (A \vdots I)$.
2. Se reduce por renglones a la matriz M a su forma escalonada. Si se genera algún renglón nulo en la parte izquierda de la matriz M (la correspondiente a la matriz A), entonces la matriz A es singular.
3. Después, se reduce el arreglo M escalonado a su forma canónica escalonada. De esta forma se obtendrá la matriz identidad en la parte izquierda del arreglo, y en la derecha se obtendrá una matriz B; es decir, se llega a $M = (I \vdots B)$.
4. La matriz B resultante será la inversa de A.

EJEMPLO 6.16. Encuéntrese la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Primero se forma el arreglo $M = (A \vdots I)$, y después de realizan transformaciones elementales para obtener a la matriz identidad en el lado izquierdo de M.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Por lo que la matriz A^{-1} es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 6.17. Se debe calcular la matriz inversa para $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Al aplicar las transformaciones elementales se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 5 & -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -4 & -1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 11 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 16 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -4 & -1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

Por lo que la matriz inversa es

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 10 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Transposición de una matriz y sus propiedades

Las matrices pueden realizar una transformación entre sus columnas y sus renglones; dicha acción se conoce como transposición.

Sea una matriz A de orden $m \times n$. Se conoce como la matriz transpuesta de A, denotada por A^T, a la matriz obtenida al escribir uno a uno los renglones de A como columnas; es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 6.18. Sean las matrices $X = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$ y $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sus respectivas matrices transpuestas son:

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad Y^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La transposición de matrices posee ciertas propiedades que son importantes en el álgebra de matrices. Sean A y B dos matrices, y k un escalar; para estos tres elementos se cumple que

- ✓ $(A + B)^T = A^T + B^T$
- ✓ $(A^T)^T = A$
- ✓ $(kA)^T = kA^T$
- ✓ $(AB)^T = B^T A^T$

Matrices simétricas, antisimétricas y ortogonales

Las matrices cuadradas presentan varios casos especiales al momento de realizar intercambios entre renglones y columnas, al realizar algún producto con otras matrices, o por la naturaleza de sus elementos.

Matrices simétricas y antisimétricas

Las matrices simétricas son un tipo especial de matrices cuadradas; dichas matrices tiene la particularidad de que son exactamente igual a su correspondiente matriz transpuesta.

Sea una matriz A de orden n; se dice que A es simétrica si se cumple que $A = A^T$. En otras palabras, una matriz cuadrada es simétrica si su diagonal principal sirve como eje de simetría entre los triángulos inferior y superior; es decir, si cada elemento fuera de la diagonal principal es $a_{ij} = a_{ji}$.

EJEMPLO 6.19. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede observar directamente que $A = A^T$ e $I = I^T$; sin embargo, B no es simétrica, ya que $-B = B^T$. Sin embargo, es un tipo de matriz conocida como matriz antisimétrica.

Sea una matriz B de orden n; se dice que B es antisimétrica si se cumple que $-B = B^T$. Equivalentemente, se deduce que $a_{ij} = -a_{ji}$; en este caso, la diagonal principal de la matriz antisimétrica siempre estará compuesta por elementos nulos, ya que $0 = -0$.

Las propiedades atribuibles a las matrices transpuestas, simétricas y antisimétricas se enumeran a continuación. Si A es una matriz cuadrada, se cumple que

- ✓ $A + A^T$ es simétrica.
- ✓ $A - A^T$ es antisimétrica.
- ✓ $A = B + C$ para alguna matriz simétrica B y alguna matriz antisimétrica C.

EJEMPLO 6.20. Las siguientes matrices ejemplifican las propiedades anteriores. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -7 & 2 \\ 4 & 0 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} A + A^T &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -7 & 2 \\ 4 & 0 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 10 & -7 & 2 \\ 8 & -7 & 18 & -5 \\ 2 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Es una matriz simétrica.

$$\begin{aligned} A - A^T &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -7 & 2 \\ 4 & 0 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Es una matriz antisimétrica.

La matriz A se puede descomponer de esta manera:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4 & 1\\ 2 & 5 & -7 & 2\\ 4 & 0 & 9 & -3\\ 1 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3 & \frac{1}{2} & 4 & 1\\ \frac{1}{2} & 5 & -\frac{7}{2} & 1\\ 4 & -\frac{7}{2} & 9 & -\frac{5}{2}\\ 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0\\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{7}{2} & 1\\ 0 & \frac{7}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

3. En este caso la matriz sumando del lado izquierdo es simétrica, mientras que la matriz sumando del lado derecho es antisimétrica.

Matrices ortogonales

Las matrices ortogonales son un caso especial dentro de la transposición de matrices.

Una matriz A de orden n es ortogonal, si se cumple que

$$AA^T=I$$

Es decir, se tiene que $A^T=A^{-1}$. El clásico ejemplo de la matriz ortogonal es la matriz identidad de cualquier orden.

EJEMPLO 6.21. Sea la matriz

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9}\\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9}\end{bmatrix}$$

El producto que se obtiene de multiplicar A por su transpuesta es

$$AA^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9}\\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9}\\ \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9}\\ -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{1+64+16}{81} & \frac{4-32+28}{81} & \frac{8+8-16}{81}\\ \frac{4-32+28}{81} & \frac{16+16+49}{81} & \frac{32-4-28}{81}\\ \frac{8+8-16}{81} & \frac{32-4-28}{81} & \frac{64+1+16}{81}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{81}{81} & \frac{0}{81} & \frac{0}{81}\\ \frac{0}{81} & \frac{81}{81} & \frac{0}{81}\\ \frac{0}{81} & \frac{0}{81} & \frac{81}{81}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, A es una matriz ortogonal.

Conjugación de una matriz y sus propiedades

Una matriz también puede transformarse por medio de una operación llamada conjugación; la matriz obtenida a partir de este proceso se llamada matriz conjugada, y sus elementos sin sencillamente los conjugados de los elementos de la matriz original.

Sea A una matriz de orden $m \times n$ con elementos pertenecientes a los números complejos. La matriz conjugada de A es aquélla denotada como

$$\bar{A} = \left(\bar{a}_{ij}\right)$$

donde $\bar{a}_{ij}$ representa al conjugado del elemento a_{ij}.

Las propiedades que cumple la matriz conjugada son homólogas de las propiedades del conjugado de los números complejos; es decir, dadas dos matrices A y B, y un escalar complejo c

- ✓ $\bar{\bar{A}} = A$
- ✓ $\overline{c \cdot A} = \bar{c} \cdot \bar{A}$
- ✓ $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$
- ✓ $\overline{A \cdot B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$
- ✓ Si $A = \bar{A}$, entonces A es una matriz real.
- ✓ Si $-A = \bar{A}$, entonces A es una matriz imaginaria.
- ✓ $A + \bar{A}$ es real.
- ✓ $A - \bar{A}$ es imaginaria.

Es importante destacar que el producto de dos matrices reales es una matriz real; en cambio, el producto de dos matrices imaginarias no es una matriz imaginaria.

Transposición-conjugación de una matriz y sus propiedades

La transposición-conjugación somete a una matriz a una transposición y después a una conjugación; la matriz obtenida se llama conjugada transpuesta. En forma matemática, esta matriz se representa por

$$A^* = \bar{A}^T$$

Las propiedades de este tipo de matrices nacen a partir de las propiedades de las matrices conjugadas y las matrices transpuestas. Para dos matrices A y B y un número complejo c, se establece que

- ✓ $(A^*)^* = A$
- ✓ $(cA)^* = \bar{c} \cdot A^*$
- ✓ $(A + B)^* = A^* + B^*$
- ✓ $(AB)^* = B^* A^*$

Para las matrices conjugadas-transpuestas se puede realizar un análisis similar al hecho con las matrices simétricas y antisimétricas. Este análisis establece que

- ✓ Si $A^* = A$, entonces A es una matriz hermítica.
- ✓ Si $A^* = -A$, entonces A es una matriz antihermítica.

EJEMPLO 6.22. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i & 2+i \\ i & 1 & -1-2i \\ 2-i & -1+2i & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -i & 1+2i & 3-4i \\ -1+2i & 2i & 2i \\ -3-4i & 2i & 7i \end{pmatrix}$$

se observa que si se transpone-conjuga la matriz A se obtendrá la misma matriz; por lo tanto, se trata de una matriz hermítica.

$$\begin{aligned} A^* &= \overline{\begin{pmatrix} 2 & -i & 2+i \\ i & 1 & -1-2i \\ 2-i & -1+2i & -4 \end{pmatrix}}^T \\ &= \begin{pmatrix} 2 & i & 2-i \\ -i & 1 & -1+2i \\ 2+i & -1-2i & -4 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -i & 2+i \\ i & 1 & -1-2i \\ 2-i & -1+2i & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La particularidad de este tipo de matrices es que los elementos de la diagonal principal siempre son números reales, y los elementos de los triángulos son conjugados entre sí.

La matriz B es una matriz antihermítica, y tiene la particularidad de que su diagonal principal contiene únicamente números imaginarios, y los elementos de los triángulos entre sí poseen la parte real con signos contrarios.

$$\begin{aligned} B^* &= \overline{\begin{pmatrix} -\imath & 1+2\imath & 3-4\imath \\ -1+2\imath & 2\imath & 2\imath \\ -3-4\imath & 2\imath & 7\imath \end{pmatrix}}^T \\ &= \overline{\begin{pmatrix} -\imath & -1+2\imath & -3-4\imath \\ 1+2\imath & 2\imath & 2\imath \\ 3-4\imath & 2\imath & 7\imath \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} i & -1-2i & -3+4i \\ 1-2i & -2i & -2i \\ 3+4i & -2i & -7i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para dos matrices A y B con elementos complejos se cumplen las propiedades siguientes:

- ✓ $A + B$ es hermítica (o antihermítica) si A y B son hermíticas (o antihermíticas).
- ✓ AA^* es hermítica.
- ✓ A^*A es hermítica.
- ✓ $A + A^*$ es hermítica, si A es cuadrada.
- ✓ $A - A^*$ es antihermítica, si A es cuadrada.

Ecuaciones matriciales y su resolución

La resolución de ecuaciones matriciales es una herramienta indispensable para resolver problemas de naturaleza matemática, física, computacional, o casi de cualquier otra rama que necesite el manejo de matrices.

Por ejemplo, se vio anteriormente que un sistema de ecuaciones lineales puede representarse como un producto de matrices; esto quiere decir que es necesario plantear una ecuación matricial para obtener la solución del sistema.

EJEMPLO 6.23. Sea el sistema de ecuaciones lineales del ejemplo 6.7.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & = & -1 \\ -2x_1 & -4x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

Este sistema puede representarse como el producto matricial $AX = B$, donde A es la matriz de coeficientes, X el vector incógnita, y B el vector de términos independientes; es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$AX = B$$

El sistema se puede resolver aplicando el método de Gauss a la matriz de coeficientes. Sin embargo, de la ecuación matricial planteada puede realizarse un tipo especial de despeje, dejando a la matriz incógnita en términos de las matrices conocidas. Hay que hacer hincapié en el hecho de que las propiedades del álgebra de matrices no son iguales a las propiedades de los conjuntos numéricos. Para este caso se realiza el siguiente procedimiento:

Para despejar a X, es necesario realizar alguna operación sobre la ecuación; si A es no-singular, entonces es posible obtener su inversa, y premultiplicar a ambos lados de la ecuación:

$A^{-1}AX = A^{-1}B$ ya que A es no-singular.

$IX = A^{-1}B$ debido a que $AA^{-1} = A^{-1}A \Rightarrow I$.

$X = A^{-1}B$ ya que $IX = XI \Rightarrow X$.

La solución de la ecuación será el producto de la matriz inversa de A por la matriz B. A^{-1} se obtiene fácilmente por el método de Gauss:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

que es la solución proporcionada en el ejemplo 6.7.

Existen ecuaciones más complejas que la anterior. Esto requiere un análisis más minucioso para saber la manera en que se despejará la matriz incógnita.

EJEMPLO 6.24. Dada la ecuación $2X + AB = CX + 3I$, se puede realizar el siguiente procedimiento para despejar a la matriz X.

$$
\begin{array}{rl}
2X + (AB - AB) = CX + 3I - AB & \text{por asociación y elemento neutro de la suma de matrices.} \\
2X - CX = CX + 3I - AB - CX & \text{por elemento neutro de la suma de matrices.} \\
2X - CX = (CX - CX) + 3I - AB & \text{por asociación y conmutación de la suma de matrices.} \\
(2)(X) - CX = 3I - AB & \text{por multiplicación por un escalar.} \\
(2)(IX) - CX = 3I - AB & \text{por definición de matriz identidad.} \\
(2I)(X) - CX = 3I - AB & \text{por asociación en la multiplicación por un escalar.} \\
(2I - C)X = 3I - AB & \text{por distribución derecha en la multiplicación matricial.} \\
(2I - C)^{-1}(2I - C)X = (2I - C)^{-1}(3I - AB) & \text{sólo si la matriz } 2I - C \text{ es no-singular.} \\
IX = (2I - C)^{-1}(3I - AB) & \text{por definición de matriz inversa.} \\
X = (2I - C)^{-1}(3I - AB) & \text{por definición de matriz identidad.}
\end{array}
$$

La ecuación plantea una solución si, y sólo si, existe la inversa de la matriz que premultiplica en la solución; de no existir dicha matriz, la ecuación no puede resolverse.

Otra situación que se debe tomar en cuenta, es la compatibilidad de las matrices al momento de realizar alguna operación; es decir, el orden de las matrices es muy importante, ya que de lo contrario la ecuación no sólo no tendría solución, sino que estaría mal diseñada.

Si se toman como ejemplo las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se tendría que la ecuación planteada tiene como solución a

$$
\begin{aligned}
X &= \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right]^{-1} \left[3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ -3 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

En cambio, si se tuviesen las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación sería la siguiente:

$$X = \left[2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}\right]^{-1}\left[3\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right]$$
$$= \left[\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}\right]^{-1}\left[\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 1\\4 & 0\end{pmatrix}\right]$$

Que presenta dos incompatibilidades: una suma de dos matrices de diferente orden, y una multiplicación de una matriz de n columnas por otra de p renglones. Como conclusión, la ecuación no es válida para las matrices anteriores.

Ejemplo 6.25. Sea la ecuación matricial

$$B(XA + B) = C - 3XA$$

donde las matrices A, B y C son:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 2\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}-2 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

La ecuación se despejaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}B(XA + B) &= C - 3XA\\ B(XA + B) &= C - 3IXA\\ BXA + BB &= C - 3IXA\\ BXA + 3IXA &= C - BB\\ (B + 3I)XA &= C - BB\\ XA &= (B + 3I)^{-1}(C - BB)\\ X &= (B + 3I)^{-1}(C - BB)A^{-1}\end{aligned}$$

Por lo que se debe considerar que las matrices A y $B + 3I$ son no-singulares. Por otro lado, la expresión BB puede reescribirse como B^2; al multiplicar una matriz por sí misma n veces se le conoce como matriz potencia. La ecuación en términos de las matrices dadas queda como

$$X = \left[\begin{pmatrix}-2 & 2\\0 & -1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right]^{-1}\left[\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}^2\right]\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 2\end{pmatrix}^{-1}$$

y la solución se realiza con las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}X &= \left[\begin{pmatrix}-2 & 2\\0 & -1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right]^{-1}\left[\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}^2\right]\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 2\end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4 & -6\\0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-2 & 4\\-\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

y se obtiene que la solución de la ecuación es $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Definición de determinante y sus propiedades

Una matriz cuadrada permite utilizar todos sus elementos para obtener una suma de productos que la representan con un solo número. Dicho número se conoce con el nombre de determinante. Es importante destacar que un determinante es un número (escalar) y no una matriz, aún cuando éste venga del manejo de los elementos de la matriz.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. El determinante A de orden 2 está definido como

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ &= |A| \end{aligned}$$

Nótese la forma en que está definido el determinante: se multiplican los elementos de la diagonal principal y el producto conserva su signo; en cambio el producto de los elementos la diagonal invertida cambia de signo. Es decir,

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= +a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

Se observa que el determinante tiene $2! = 2$ productos, ya que el determinante es de orden dos.

El determinante de orden tres puede definirse a partir del determinante de orden dos. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Su determinante se define como

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} \end{aligned}$$

Este tipo de determinantes también pueden calcularse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ &= +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

Este determinante tiene $3! = 6$ productos, ya que el determinante es de orden tres.

Si un determinante de orden tres se define a partir de uno de orden dos, entonces el determinante de orden cuatro se define con respecto al determinante de orden tres, y así sucesivamente. Esto quiere decir que un determinante de orden n puede definirse con respecto a un determinante de orden $n-1$.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

El número conocido como determinante de A se define como

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - \cdots + a_{n1}M_{n1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1} \end{aligned}$$

donde M_{k1} es el determinante de orden $n-1$ obtenido al eliminar el renglón k y la columna una.

EJEMPLO 6.26. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Los respectivos determinantes son

$$\begin{aligned} \det A &= (1)(2) - (1)(1) \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det B &= 2\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 2(6-63) - 5(3-36) + 8(21-24) \\ &= 2(-57) - 5(-33) + 8(-3) \\ &= -114 + 165 - 24 \\ &= 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det C &= 4\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 6 & -7 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 6 & -7 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -7 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4[2(-5+14) - 1(-1-0) + 6(-2-0)] - 0 + 2[-6(-1-0) - 2(0+7) + 6(0+1)] \\ &\quad - 1[-6(-2-0) - 2(0+5) + 1(0+1)] \\ &= 4[2(9) - 1(-1) + 6(-2)] + 2[-6(-1) - 2(7) + 6(1)] - 1[-6(-2) - 2(5) + 1(1)] \\ &= 4[18 + 1 - 12] + 2[6 - 14 + 6] - 1[12 - 10 + 1] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4(7) + 2(-2) - 1(3) \\
&= 28 - 4 - 3 \\
&= 21
\end{aligned}
$$

Así, para obtener un determinante de orden mayor a dos es necesario calcular varios determinantes.

Las propiedades de un determinante se enumeran a continuación. Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden, y un escalar k.

- ✓ $\det A = \det A^T$.
- ✓ $\det A = 0$, si posee una columna (o renglón) de ceros.
- ✓ $\det A = 0$, si posee dos columnas (o renglones) iguales.

Si B se ha obtenido de aplicar alguna transformación elemental sobre A,

- ✓ $-\det A = \det B$, si se han intercambiado dos renglones de A.
- ✓ $k \det A = \det B$, si se ha multiplicado un renglón de A por k.
- ✓ $\det A = \det B$, si se ha sumado un múltiplo de un renglón a otro de A.

Si A es una matriz no-singular,

- ✓ $\det A \neq 0$.

Si se realiza una multiplicación,

- ✓ $\det AB = (\det A)(\det B)$.
- ✓ $\det kA = k^n \det A$.

Estas propiedades son muy utilizadas al momento de calcular determinantes, matrices inversas, productos internos en espacios vectoriales, matrices de transformaciones lineales, etc.

Determinante de una matriz triangular

Las matrices triangulares presentan una gran facilidad al momento de calcular su determinante. Si se tiene una matriz triangular superior (o inferior) A de orden dos, el determinante quedaría establecido así

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}
\end{aligned}
$$

Si la matriz A fuese de orden tres,

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33}
\end{aligned}
$$

En forma general, si A es una matriz triangular (superior o inferior) de orden n, entonces su determinante será el producto de los elementos de la diagonal principal; es decir,

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Con ayuda de esta definición, y de la propiedad 6 de los determinantes (mencionada en el apartado anterior) se puede calcular un determinante de manera fácil y rápida.

EJEMPLO 6.27. Sea la matriz C del ejemplo 6.26,

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede obtener una matriz triangular superior al aplicar transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & -7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{15}{2} & -7 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

El determinante queda establecido como

$$\begin{aligned} \det C &= (4)(2)(-3)\left(-\frac{7}{8}\right) \\ &= 21 \end{aligned}$$

que es el resultado obtenido en el ejemplo 6.26.

Cálculo de determinantes

Se ha visto en los ejemplos que el cálculo de determinantes puede volverse tedioso. Por ejemplo, si de desease calcular un determinante de orden 5, se tendría que calcular 5 determinantes de orden 4, que a su vez cada uno necesita 4 determinantes de orden 3; esto implica que dicho cálculo requiere de realizar 15 determinantes.

Para simplificar estos cálculos se tienes diversos métodos para resolver determinantes. Entre estos métodos se encuentran:

- ✓ La regla de Sarrus.
- ✓ Determinante de una matriz triangular.
- ✓ El método de pivoteo.
- ✓ El método de los cofactores.

La regla de Sarrus obedece al producto por medio de las diagonales de los determinantes, como se vio en los casos de los determinantes de orden 2 y orden 3:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$= +a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Para un determinante de orden 2.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$
$$= +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Para un determinante de orden 3. Es importante destacar que la regla de Sarrus sólo puede aplicarse a determinantes de orden 2 ó 3; determinantes de orden 4 en adelante calculados con este método serían erróneos.

El método de escalonamiento por transformaciones elementales para obtener una matriz triangular permite calcular el determinante de forma sencilla; sin embargo, es necesario considerar que solamente puede utilizarse la transformación del tipo

$$R_j \to kR_i + R_j$$

Cualquier otra transformación elemental, o incluso, una variación de la transformación mencionada alteraría el resultado del determinante.

A continuación se enuncian los métodos de cofactores y pivoteo.

Desarrollo por cofactores

Antes de comenzar con el método se establecerá el concepto de menor. Si se toma como ejemplo la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se puede tomar un determinante de grado 2 si se elige un elemento y se suprimen la columna y el renglón al que pertenece; es decir, si se tomase el elemento a_{23}, por ejemplo, el determinante de grado 2 se obtendría al suprimir los elementos a_{21} y a_{22} de la segunda fila, y los elementos a_{13} y a_{33} de la tercera columna:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

A dicho determinante se le conoce como menor 23.

Sea A una matriz de orden n y M_{ij} es el determinante de la matriz de orden $n-1$ obtenida de A al eliminar el renglón i y la columna j. El número M_{ij} es conocido como el menor ij de A.

Así, una matriz de orden n, tendrá n^2 menores, ya que ése es el número de elementos de la matriz.

A su vez el menor ij puede cambiar de signo dependiendo de la ubicación de a_{ij} en la matriz A. Esto quiere decir que se puede obtener un número tal que

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Este número es conocido como cofactor ij de A. El número de cofactores de una matriz es igual al número de menores.

El método de los cofactores establece que si A es una matriz de orden n, y r es un número entero tal que $1 \leq r \leq n$, entonces

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{rj} A_{rj}$$

o bien

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ir} A_{ir}$$

Ambas expresiones son equivalentes para el obtener un determinante. Si se observa correctamente, se notará que esta es la definición de determinante que se dio en el principio del apartado de determinantes.

EJEMPLO 6.28. Sea el determinante

$$\det X = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 9 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Éste puede ser calculado de dos formas, tomando una fila y multiplicando cada elemento de esa fila por su respectivo cofactor; o tomando una columna y haciendo el mismo procedimiento.

$$\begin{aligned} \det X &= (-1)(-1)^2 \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (2)(-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (1)(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(8-18) - 2(0+18) + (0+16) \\ &= 10 - 36 + 16 \Rightarrow -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det X &= (-1)(-1)^2 \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (0)(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \\ &= -(8-18) + 0 - 2(18-8) \\ &= 10 - 20 \Rightarrow -10 \end{aligned}$$

Método de pivoteo

El método de pivoteo permite utilizar la propiedad de inalterabilidad que tienen los determinantes al aplicar sucesivamente la transformación $R_i \rightarrow kR_j + R_i$. Este método sigue los siguientes pasos:

1. Se elige la columna o el renglón que contenga el mayor número de ceros posibles.

2. De la línea elegida se toma un elemento, de ser posible, el que tenga un valor más cercano a cero; después, se aplica la transformación elemental $R_i \to kR_j + R_i$ para obtener ceros a lo largo de la línea elegida.
3. Se calcula el determinante por el método de cofactores.
4. Se aplican los pasos 1 a 3 sucesivamente hasta obtener un determinante de orden 2 o 3 y se puede resolver por medio de la regla de Sarrus.

Este método permite comprimir o condensar un determinante de orden n hasta uno de orden 2.

EJEMPLO 6.29. Sea el determinante $\det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

Para calcularlo por medio del método de pivoteo se elegirá la columna 2, ya que contiene un cero y sus demás elementos están más cercanos a cero que los elementos de cualquier otra fila o columna; con base en este criterio, el elemento que será el pivote para obtener un determinante de orden 3 será el número 1, ubicado en la posición a_{42}. A partir de aquí se aplica sucesivamente la transformación elemental de suma de renglones.

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \\ -11 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^6(1)\begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \\ -11 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Para el determinante de orden 3 resultante se tomará la columna 2 y el elemento de la posición a_{12}; nuevamente, se realiza la transformación elemental de suma de dos renglones y se obtiene lo siguiente:

$$\det B = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \\ -11 & 3 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & -2 \\ -11 & 3 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & -2 \\ -20 & 0 & -\frac{23}{2} \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^3(2)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -20 & -\frac{23}{2} \end{vmatrix}$$
$$= -2(23-40)$$
$$= -2(-17)$$
$$= 34$$

que es el valor del determinante inicial.

EJEMPLO 6.30. Calcúlese el determinante

$$\det F = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Se elegirá la columna 2, y el elemento a_{22} como pivote.

$$\det F = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

El determinante quedará definido como

$$\det F = (-1)^4(1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Para el nuevo determinante se tomará el renglón 2, y el elemento a_{21}.

$$\det F = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 9 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 9 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 9 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 11 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Por lo que ahora se define

$$\det F = (-1)^3(-1)\begin{vmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 11 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Y ahora se tomará el renglón 3, y el elemento a_{31} como pivote.

$$\det F = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 11 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 0 & 25 & 60 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 22 & 52 \\ 0 & 25 & 60 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^4(-1)\begin{vmatrix} 22 & 52 \\ 25 & 60 \end{vmatrix}$$
$$= -[(22)(60) - (25)(52)]$$
$$= -20$$

que es el valor del determinante buscado.

Matriz Adjunta

Los cofactores son utilizados en el álgebra matricial cuando se requiere obtener alguna matriz inversa. Para ello se utiliza la matriz adjunta.

Sea A una matriz cuadrada de orden n. A la matriz transpuesta que se obtiene al sustituir cada elemento a_{ij} de A, por el cofactor A_{ij}, se le llama matriz adjunta de A y se representa por $\operatorname{adj} A$; es decir, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la matriz adjunta de A es

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

EJEMPLO 6.31. Para la matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, su matriz adjunta se calcula como:

$$\begin{aligned}
D_{11} &= (-1)^{1+1}[(-1)(-1) - (2)(1)] \Rightarrow -1 \\
D_{12} &= (-1)^{1+2}[(1)(-1) - (0)(1)] \Rightarrow 1 \\
D_{13} &= (-1)^{1+3}[(2)(1) - (0)(-1)] \Rightarrow 2 \\
D_{21} &= (-1)^{2+1}[(1)(-1) - (2)(0)] \Rightarrow 1 \\
D_{22} &= (-1)^{2+2}[(2)(-1) - (0)(0)] \Rightarrow -2 \\
D_{23} &= (-1)^{2+3}[(2)(2) - (0)(1)] \Rightarrow -4 \\
D_{31} &= (-1)^{3+1}[(1)(1) - (-1)(0)] \Rightarrow 1 \\
D_{32} &= (-1)^{3+2}[(2)(1) - (1)(0)] \Rightarrow -2 \\
D_{33} &= (-1)^{3+3}[(2)(-1) - (1)(1)] \Rightarrow -3
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz adjunta de D es $\operatorname{adj} D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}^T$, donde cada elemento de D, es sustituido por su correspondiente cofactor.

Cálculo de la matriz inversa por medio de la adjunta

La matriz inversa puede obtenerse directamente por medio de su matriz adjunta y su determinante. Como se mencionó en las propiedades de los determinantes, si el determinante de una matriz A es diferente de cero, entonces la matriz inversa existe. Por lo tanto, para una matriz A de orden n, A^{-1} puede calcularse como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

EJEMPLO 6.32. Encuéntrese la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Primero se obtiene la matriz adjunta:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1}[(-1)(8)-(1)(3)] \Rightarrow -11\\
A_{12} &= (-1)^{1+2}[(2)(8)-(4)(3)] \Rightarrow -4\\
A_{13} &= (-1)^{1+3}[(2)(1)-(4)(-1)] \Rightarrow 6\\
A_{21} &= (-1)^{2+1}[(0)(8)-(1)(2)] \Rightarrow 2\\
A_{22} &= (-1)^{2+2}[(1)(8)-(4)(2)] \Rightarrow 0\\
A_{23} &= (-1)^{2+3}[(1)(1)-(4)(0)] \Rightarrow -1\\
A_{31} &= (-1)^{3+1}[(0)(3)-(-1)(2)] \Rightarrow 2\\
A_{32} &= (-1)^{3+2}[(1)(3)-(2)(2)] \Rightarrow 1\\
A_{33} &= (-1)^{3+3}[(1)(-1)-(2)(0)] \Rightarrow -1
\end{aligned}$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$$

Después se obtiene el determinante de A:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{vmatrix}\\
&= (1)(-8-3)-(0)(16-12)+(2)(2+4)\\
&= -11-0+12\\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo que la matriz inversa de A queda dada como:

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

que es el resultado obtenido en el ejemplo 6.16.

EJEMPLO 6.33. Se debe calcular la matriz inversa para $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz adjunta es:

$$\begin{aligned}
G_{11} &= (-1)^{1+1}[(2)(1)-(2)(-3)] \Rightarrow 8\\
G_{12} &= (-1)^{1+2}[(5)(1)-(0)(-3)] \Rightarrow -5\\
G_{13} &= (-1)^{1+3}[(5)(2)-(0)(2)] \Rightarrow 10\\
G_{21} &= (-1)^{2+1}[(1)(1)-(2)(-1)] \Rightarrow -3\\
G_{22} &= (-1)^{2+2}[(2)(1)-(0)(-1)] \Rightarrow 2\\
G_{23} &= (-1)^{2+3}[(2)(2)-(0)(1)] \Rightarrow -4\\
G_{31} &= (-1)^{3+1}[(1)(-3)-(2)(-1)] \Rightarrow -1\\
G_{32} &= (-1)^{3+2}[(2)(-3)-(5)(-1)] \Rightarrow 1\\
G_{33} &= (-1)^{3+3}[(2)(2)-(5)(1)] \Rightarrow -1
\end{aligned}$$

$$\operatorname{adj} G = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 10 \\ -3 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$$

El determinante:

$$\begin{aligned} \det G &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2)(8) - (5)(3) + (0)(-1) \\ &= 16 - 15 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo que la matriz inversa es la misma matriz obtenida en el ejemplo 6.17:

$$G^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 8 & -3 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 10 & -4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -3 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 10 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$