Números Complejos

El conjunto de los números complejos

La supremacía de los números reales como conjunto numérico máximo duró poco; no existe un número real a que satisfaga la ecuación $x^2 + a = 0$. Para ello, es necesaria la introducción de un nuevo conjunto numérico. Los números complejos aparecen con la introducción de los **números imaginarios,** $\mathbb{I}$; éstos llevan implícita la operación $x = \sqrt{-a}$, cuya solución se representa como $x = \pm\sqrt{a}i$; i es el número imaginario más conocido y fue concebido por el matemático suizo Leonhard Euler, quien lo definió como $i = \sqrt{-1}$. La figura 3.1 muestra la construcción de los conjuntos numéricos conocidos.

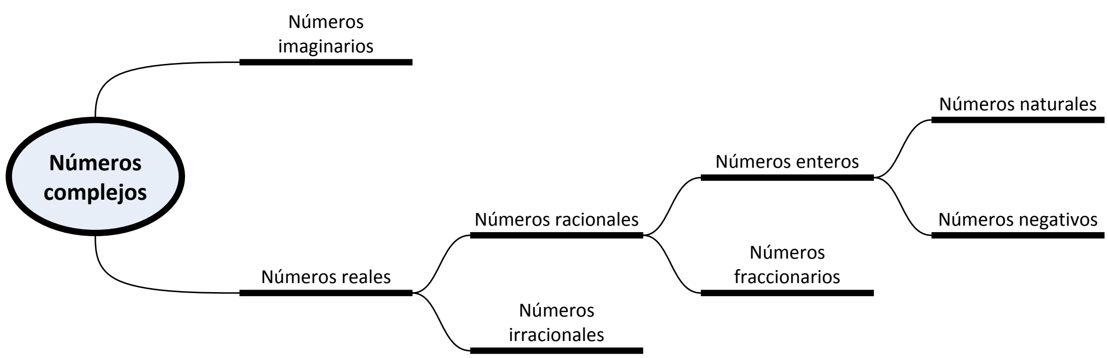

Figura 3.1. Construcción del conjunto de los números complejos.

Forma binómica

Un número imaginario queda definido como todo aquél que tenga la forma bi, donde b es un número real cualquiera. Para obtener ese número se utilizan las mismas reglas de operación de los números reales.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{-b^2} \\ &= \sqrt{(-1)(b^2)} \\ &= \sqrt{-1}\sqrt{b^2} \\ &= bi \end{aligned}$$

Con base en esta definición, se puede obtener números imaginarios como $2i, 7i, -\frac{2}{3}i, \sqrt{2i}$, [...], y verificar que la propiedad de completitud también está presente en el conjunto de números imaginarios.

Cuando se desea encontrar las soluciones de ecuaciones como $x^2 + 4x + 13 = 0$, se obtienen raíces que no son números imaginarios; utilizando la ecuación general de segundo grado se obtiene

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2}$$

$$= -2 \pm \frac{\sqrt{-36}}{2}$$
$$= -2 \pm 3i$$

Lo cual se podría interpretar como la 'suma' de un número real y un número imaginario. Pero en realidad, este tipo de números es una extensión de los reales y los imaginarios, conocidos como los **números complejos** ($\mathbb{C}$).

Un número complejo es una expresión de la forma $z = a + bi$, donde a y b son reales, e i es la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$. De manera formal se tiene que:

$$C = \{z | z = a + bi; a, b \in R, i^2 = -1\}$$

Dentro del número complejo se distinguen dos partes independientes entre sí: la parte determinada por a, conocida como parte real; y la parte denotada por bi, llamada parte imaginaria. Si se considera el caso en el cual $a = 0$, entonces el número complejo será conocido como número imaginario puro; por otra parte, si $b = 0$, entonces se conocerá como número real puro.

Igualdad

La igualdad entre números complejos es equivalente a probar la igualdad entre dos pares de números reales.

Si se tienen dos números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$, entonces

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

Es decir, las partes reales deben ser iguales entre sí, y las imaginarias también deben ser iguales entre sí. Si alguna de las dos igualdades no se cumple, entonces no existirá igualdad entre ambos números.

Conjugado

En Álgebra, se define al conjugado de un binomio como $\overline{x + a} = x - a$. Si se toma en cuenta que un número complejo es un binomio, entonces su conjugado estará dado por:

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

En este caso, la parte imaginaria será la única afectada al momento de obtener el conjugado de un número complejo.

EJEMPLO 3.1. Los números complejos $z_1 = -1 + 2i$ y $z_2 = -1 - 2i$ no son iguales; se verifica que $-1 = -1$ para la parte real, pero $2 \neq -2$ en la parte imaginaria. Eso significa que $z_1 \neq z_2$.

Sin embargo si se verifica que

$$\overline{-1 + 2i} = -1 - 2i$$

Por lo tanto

$$\bar{z}_1 = z_2$$

Representación gráfica

Una propiedad interesante de los números complejos es que pueden representarse como una pareja ordenada de números reales, y se pueden dibujar como puntos dentro de un plano coordenado XY. Esta forma es conocida como representación gráfica de un número complejo, y está definida por el siguiente isomorfismo:

$$z = a + bi \to (a, b)$$

Para esta representación se ha convenido en respetar el orden dentro de la forma binómica: la primera componente del número complejo será la parte real y la segunda la parte imaginaria. De esta forma, se deduce que el eje destinado para situar la parte real es el eje de las abscisas, en tanto, que el eje de las ordenadas representará al eje imaginario; a este caso especial de plano coordenado se le conoce como plano complejo o plano de Argand, el cual puede visualizarse en la figura 3.2.

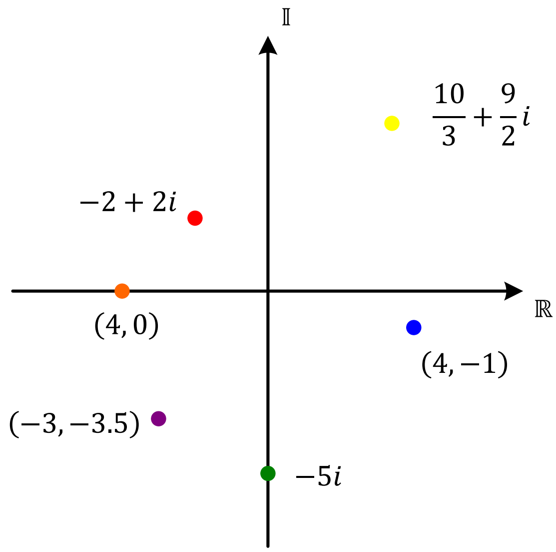

Figura 3.2. Plano de Argand.

Así, a cada número complejo le corresponde uno y sólo un punto dentro del plano, y viceversa, cada punto representa uno y solamente un número complejo. En la figura 3.2 se observan representados seis puntos, los cuales pueden escribirse en su forma de binomio o en forma de pareja ordenada.

$$z_1 = -2 + 2i \to (-2, 2)$$
$$z_2 = \frac{10}{3} + \frac{9}{2}i \to \left(\frac{10}{3}, \frac{9}{2}\right)$$
$$z_3 = -4 \to (-4, 0)$$
$$z_4 = 4 - i \to (4, -1)$$
$$z_5 = -3 - 3.5i \to (-3, -3.5)$$
$$z_6 = -5i \to (0, -5)$$

Operaciones y sus propiedades: adición, sustracción, multiplicación y división. Propiedades del conjugado

Las operaciones dentro de los números complejos deben involucrar tanto a la parte real como a la imaginaria. En este caso, las operaciones como la adición y la sustracción no contemplan la combinación de ambas partes, en tanto que el producto y el cociente sí lo hacen.

Adición y sustracción

La adición y la sustracción de números complejos se realizan de manera idéntica que en los números reales; la diferencia radica en que se opera parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria.

Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ dos números complejos cualesquiera; las operaciones de suma y resta se definen como:

1. $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
2. $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

La adición de números complejos (y la sustracción, siendo un caso especial de la adición) cumple las siguientes propiedades:

- ✓ Cerradura $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$
- ✓ Conmutativa $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- ✓ Asociativa $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
- ✓ Elemento neutro $z_1 + (0 + 0i) = z_1$
- ✓ Elemento inverso $z_1 + (-z_1) = 0 + 0i$

EJEMPLO 3.2. Se desea obtener la suma y la resta de los números $z_1 = -5 + 4i$ y $z_2 = 9 - 3i$.

Para la suma:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (-5 + 4i) + (9 - 3i) \\ &= (-5 + 9) + (4 - 3)i \\ &= 4 + i \end{aligned}$$

Para la resta:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (-5 + 4i) - (9 - 3i) \\ &= (-5 - 9) + (4 + 3)i \\ &= -14 + 7i \end{aligned}$$

Multiplicación y división

Las operaciones de multiplicación y división presentan cierta diferencia con respecto a sus homólogas en los números reales. En estos casos, las partes real e imaginaria deben interactuar entre sí para obtener el resultado de la operación. Es necesario recalcar la importancia de la definición de la unidad imaginaria $i^2 = -1$, ya que al mezclarse ambas partes el producto de términos imaginarios se vuelve real.

En la multiplicación se opera como si se tratase de un binomio ordinario; es decir, se opera término a término y al final se reducen los términos semejantes.

$$\begin{aligned}(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) &= a_1a_2+a_1b_2i+b_1a_2i+b_1b_2i^2\\ &= a_1a_2-b_1b_2+a_1b_2i+a_2b_1i\\ &= (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i\end{aligned}$$

El cociente de dos números complejos debe realizarse utilizando el conjugado de número complejo: se debe multiplicar tanto el dividendo como el divisor por el conjugado del divisor, y realizando las reducciones algebraicas necesarias.

$$\begin{aligned}\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} &= \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}\cdot\frac{a_2-b_2i}{a_2-b_2i}\\ &= \frac{a_1a_2-a_1b_2i+a_2b_1i-b_1b_2i^2}{a_2^2-a_2b_2i+a_2b_2i-b_2^2i^2}\\ &= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}\\ &= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}+\frac{(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}i\end{aligned}$$

La multiplicación (y la división como caso especial) cumple con las siguientes propiedades:

- ✓ Cerradura $z_1z_2 \in \mathbb{C}$
- ✓ Conmutativa $z_1z_2 = z_2z_1$
- ✓ Asociativa $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$
- ✓ Elemento neutro $z_1(1+0i) = z_1$
- ✓ Elemento inverso $z_1z_1^{-1} = 1+0i$
- ✓ Distributiva con respecto de la suma $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2+z_1z_3$

EJEMPLO 3.3. El producto de los números $z_! = 2-3i$ y $z_2 = 1-i$ se calcula como

$$\begin{aligned}z_1z_2 &= (2-3i)(1-i)\\ &= (2)(1)+(2)(-i)+(-3i)(1)+(-3i)(-i)\\ &= 2-2i-3i+3i^2\\ &= -1-5i\end{aligned}$$

La división de los mismos números sería

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2-3i}{1-i}\\ &= \frac{2-3i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\\ &= \frac{2+2i-3i-3i^2}{1+1}\\ &= \frac{5}{2}-\frac{1}{2}i\end{aligned}$$

Propiedades del conjugado

Los números complejos presentan propiedades interesantes con respecto al conjugado. En esencia, son las mismas propiedades que los binomios conjugados ordinarios. Sean los números $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces, se tiene que:

- ✓ $\bar{\bar{z}} = z$
- ✓ $z_1 = \bar{z}_1 \Leftrightarrow z_1 \in \mathbb{R}$
- ✓ $z_1 + \bar{z}_1 \in \mathbb{R}$
- ✓ $z_1\bar{z}_1 \in \mathbb{R}$
- ✓ $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- ✓ $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$

EJEMPLO 3.4. Demuéstrese las propiedades $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ y $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$ del conjugado. Sean los números $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$. La propiedad de suma de conjugados se verifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \overline{(a_1 + b_1 i)} + \overline{(a_2 + b_2 i)} &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i \\ (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) &= \\ a_1 + a_2 - b_1 i - b_2 i &= \\ (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i &= \end{aligned}$$

Con respecto a la multiplicación de conjugados se demuestra que

$$\begin{aligned} \overline{(a_1 + b_1 i)} \cdot \overline{(a_2 + b_2 i)} &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \\ (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) &= \\ a_1 a_2 - a_2 b_1 i - a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2 &= \\ (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_2 b_1 + a_1 b_2)i &= \end{aligned}$$

Y ambas propiedades se comprueba son ciertas.

Forma trigonométrica

Como se ha visto, un número complejo puede representarse como un punto dentro de un plano coordenado. En la figura 3.3, se puede observar que el punto $Z(a, b)$ denota al número complejo $z = a + bi$; también se destaca que el trazo del origen al punto Z tiene una magnitud constante y forma un ángulo φ con respecto al eje real.

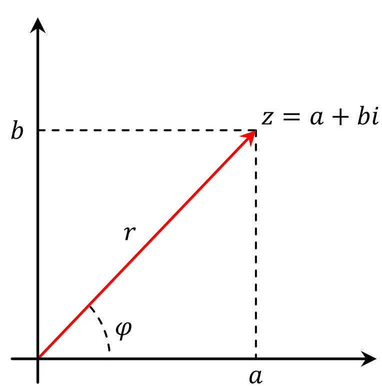

Figura 3.3. Magnitud y ángulo de un punto en el plano de Argand.

Transformación de la forma binómica a la trigonométrica

La transformación entre la forma trigonométrica y la binómica de los números complejos es importante al momento de realizar las operaciones básicas, y algunas otras que se mencionarán más adelante.

Tomando como referencia la figura 3.3 y utilizando trigonometría básica, se destaca que

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}\\ &= \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}\\ &= \frac{b}{r} \Rightarrow b = r\sin\varphi\end{aligned}$$

Al realizar una igualación con la forma binómica se tiene que

$$\begin{aligned}a + bi &= r\cos\varphi + ri\sin\varphi\\ &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\end{aligned}$$

Esta notación es conocida como la forma trigonométrica de un número complejo; también puede escribirse de forma compacta como $z = r\,\text{cis}\,\varphi$.

EJEMPLO 3.5. Encuéntrese la forma de binomio del número $z = 5(\cos 30° + i\sin 30°)$.

$$\begin{aligned}a + bi &= 5\cos 30° + 5i\sin 30°\\ &= 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 5i\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene que $z = \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}i$.

EJEMPLO 3.6. ¿Cuál es la representación en forma binómica de $z = \cos 225° + i\sin 225°$?

$$\begin{aligned}a + bi &= \cos 225° + i\sin 225°\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\end{aligned}$$

El número buscado es $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Definición de módulo, de argumento y de igualdad de números complejos en forma trigonométrica

Módulo y argumento

En las ecuaciones del apartado anterior, se introdujeron dos parámetros nuevos: r y φ, que son las variables utilizadas dentro del sistema trigonométrica de coordenadas.

Para calcular r y φ es necesario recurrir a los conceptos de distancia entre dos puntos y tangente de un ángulo.

El parámetro r es conocido como módulo o valor absoluto del número complejo; su obtención es equivalente a obtener una distancia entre el origen y el punto Z, es decir:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Con respecto al valor φ, éste es llamado argumento o amplitud del número complejo; de la figura 3.3 se puede deducir que

$$\begin{aligned} \tan\varphi &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \\ &= \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = \arctan\frac{b}{a} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.7. Encuéntrese la forma trigonométrica del número $z = 4 - 3i$.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan\frac{-3}{4} \\ &= 323.13° \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que $z = 5 \operatorname{cis} 323.13°$.

EJEMPLO 3.8. Encuéntrese la forma trigonométrica del número $z = 4 + 4i$.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(4)^2 + (4)^2} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan\frac{4}{4} \\ &= 45° \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que $z = 4\sqrt{2} \operatorname{cis} 45°$.

Igualdad en forma trigonométrica

Dentro de la forma trigonométrica de los números complejos se presenta una peculiaridad. Sean dos números $z_1 = r_1 \operatorname{cis}\varphi_1$ y $z_2 = r_2 \operatorname{cis}\varphi_2$; si los módulos son iguales y los argumentos difieren en un múltiplo de 360°, entonces ambos estarán representados por el mismo punto dentro del plano complejo; en consecuencia, al transformarlos en su forma binómica tendrán la misma parte real y la misma parte imaginaria, por lo que establecerán una igualdad.

Dos números complejos en forma trigonométrica $z_1 = r_1 \operatorname{cis}\varphi_1$ y $z_2 = r_2 \operatorname{cis}\varphi_2$ son iguales si y solo si

$$r_1 = r_2, \qquad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \qquad \forall\, k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

EJEMPLO 3.9. Sean los números complejos $z_1 = 4 \operatorname{cis} 30°$ y $z_2 = 4 \operatorname{cis} 390°$. ¿Ambos números son iguales?

Para verificarlo se obtendrá se forma binómica. Para z_1:

$$\begin{aligned} z_1 &= 4\cos 30° + 4i \sin 30° \\ &= 2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

Para z_2:

$$\begin{aligned} z_1 &= 4\cos 390° + 4i \sin 390° \\ &= 2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

Se corrobora que los números son iguales; además, en forma trigonométrica se puede comprobar que

$$390° = 30° + k360°$$

donde $k = 1$.

Operaciones en forma trigonométrica: multiplicación, división, potenciación y radicación

Las operaciones básicas que se pueden realizar dentro de la forma trigonométrica contemplan, analíticamente, sólo al producto y al cociente; la suma y resta dentro de la forma trigonométrica necesita realizar una conversión de los números a su forma de binomio; en el plano de Argand, se debe utilizar el método gráfico del paralelogramo para realizar la suma o la resta. La figura 3.4 muestra la suma de dos número complejos por medio del método del paralelogramo.

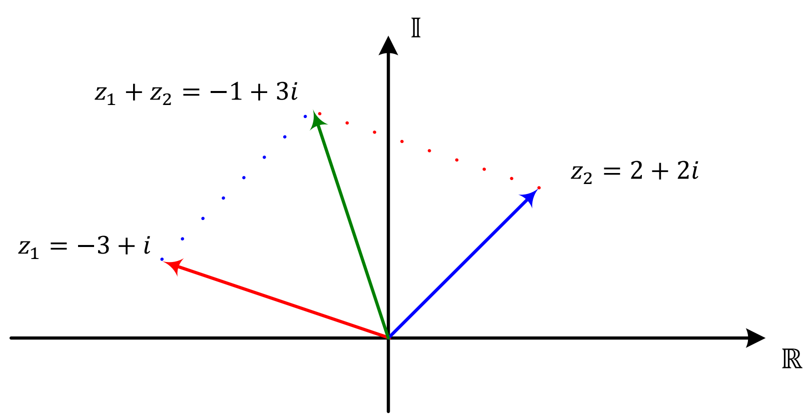

Figura 3.4. Suma por medio del paralelogramo.

Multiplicación y división

Para realizar la multiplicación en forma trigonométrica solo basta realizar el producto de sus módulos y la suma de sus argumentos; al tratarse de dos números reales, el resultado de las operaciones es inmediato.

Sean $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \varphi_1$ y $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \varphi_2$. Su producto estará dado por:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

EJEMPLO 3.10. La multiplicación de $z_1 = -1 + i$ y $z_2 = 1 - i$ se interpreta como

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (-1+i)(1-i)\\
&= -1+i+i-i^2\\
&= 2i
\end{aligned}
$$

En forma trigonométrica

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= \left[\sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°)\right]\left[\sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)\right]\\
&= 2[\cos(135+315)° + i\sin(135+315)°]\\
&= 2(\cos 450° + i\sin 450°)\\
&= 2\operatorname{cis} 90°
\end{aligned}
$$

Que es el mismo resultado obtenido anteriormente, pero en forma trigonométrica; se comprueba que existe equivalencia entre la multiplicación en forma de binomio y en forma trigonométrica.

EJEMPLO 3.11. Se desea multiplicar los números $z_1 = 4(\cos 20° + i\sin 20°)$ y $z_2 = 3\operatorname{cis} 25°$. Para efectuarla se lleva a cabo el siguiente proceso:

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (4)(3)[\cos(20°+25°) + i\sin(20°+25°)]\\
&= 12\operatorname{cis} 45°
\end{aligned}
$$

Dentro de la división el fenómeno es análogo a la multiplicación. En este caso, el módulo del numerador se dividirá entre el módulo del denominador; respecto al ángulo del cociente, el resultado estará dado por el argumento del dividendo menos el argumento del divisor.

Para dos números complejos en forma trigonométrica $z_1 = r_1\operatorname{cis}\varphi_1$ y $z_2 = r_2\operatorname{cis}\varphi_2$, su división estará dada por:

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1\operatorname{cis}\varphi_1}{r_2\operatorname{cis}\varphi_2}\\
&= \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\varphi_1+\varphi_2)
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 3.12. Divídase $z_1 = \sqrt{2}\operatorname{cis} 135°$ entre $z_2 = \sqrt{2}\operatorname{cis} 315°$.

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2}\operatorname{cis} 135°}{\sqrt{2}\operatorname{cis} 315°}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}(135°-315°)\\
&= \operatorname{cis}(-180°)\\
&= \operatorname{cis} 180°
\end{aligned}
$$

Lo que quiere decir, que el resultado de la división es – 1.

EJEMPLO 3.13. ¿Cuál es el resultado de dividir $4\sqrt{2}\operatorname{cis} 45°$ entre $2\operatorname{cis} 315°$?

$$
\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\sqrt{2}\operatorname{cis} 45°}{2\operatorname{cis} 315°}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}(45° - 315°) \\
&= 2\sqrt{2}\operatorname{cis}(-270°) \\
&= 2\sqrt{2}\operatorname{cis} 90°
\end{aligned}
$$

Potenciación y radicación

Dentro de la forma trigonométrica se introduce un par de nuevas operaciones: la potenciación y la radicación de números complejos.

Para elevar un número complejo a una potencia n, es necesario recurrir a la definición de multiplicación. Sea $z = r\operatorname{cis}\varphi$.

$$
\begin{aligned}
z^n &= z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z \\
(r\operatorname{cis}\varphi)^n &= (r\operatorname{cis}\varphi)(r\operatorname{cis}\varphi)(r\operatorname{cis}\varphi)\ldots(r\operatorname{cis}\varphi) \\
&= (r \cdot r \cdot r \cdot \ldots \cdot r) r\operatorname{cis}(\varphi + \varphi + \varphi + \cdots + \varphi) \\
&= r^n \operatorname{cis} n\varphi
\end{aligned}
$$

La ecuación $(r\operatorname{cis}\varphi)^n = r^n\operatorname{cis} n\varphi$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es conocida como el teorema de De Moivre, y es utilizada para obtener las potencias naturales de todo número complejo en forma trigonométrica.

EJEMPLO 3.14. Dado el número $z = 4(\cos 120° + i\sin 120°)$, calcúlese z^3.

$$
\begin{aligned}
z^3 &= [4(\cos 120° + i\sin 120°)]^3 \\
&= (4)^3[\cos(3 \cdot 120°) + \sin(3 \cdot 120°)] \\
&= 64(\operatorname{cis} 360°) \\
&= 64
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 3.15. Calcúlese $(\cos 30° + i\sin 30°)^6$.

$$
\begin{aligned}
(\cos 30° + i\sin 30°)^6 &= 1^6(\cos 6 \cdot 30° + i\sin 6 \cdot 30°) \\
&= \cos 180° + i\sin 180° \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Un caso particular es el de las potencias de la unidad imaginaria, i. Este número presenta un ciclo al momento de elevarlo a potencias consecutivas:

$$
\begin{aligned}
i^0 &= 1 \\
i^1 &= i \\
i^2 &= -1 \\
i^3 &= i^2 i \Rightarrow (-1)i = -i \\
i^4 &= i^2 i^2 \Rightarrow (-1)(-1) = 1 \\
i^5 &= i^3 i^2 \Rightarrow (-i)(-1) = i \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Por lo que, para obtener i a una potencia dada, basta con servirse de las leyes de los exponentes para obtener el resultado.

Para calcular la raíz n-ésima de un número complejo se deben observar la siguiente aseveración:

Sean los números $z = r \operatorname{cis} \varphi$ y $w = s \operatorname{cis} \omega$. Si $w^n = z$, entonces, se dice que w es la raíz n-ésima de z, la cual se denota como $w = \sqrt[n]{z}$. Esto es

$$\begin{gathered} w^n = z \\ (s \operatorname{cis} \omega)^n = r \operatorname{cis} \varphi \\ s^n \operatorname{cis} n\omega = r \operatorname{cis} \varphi \end{gathered}$$

Por igualdad se obtiene que $s^n = r$ y $n\omega = \varphi$. Sin embargo, para el argumento se debe aclarar que cuando se multiplican dos números en forma trigonométrica, se obtendrá un resultado con argumento de la forma $\varphi + k360°$, donde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ Por lo que

$$\begin{aligned} n\omega &= \varphi + k360° \ \forall \ k = 1, 2, 3, \dots \\ \omega &= \frac{\varphi + k360°}{n} \end{aligned}$$

Debido al factor k, se deduce que existe más de una raíz n-ésima para cada número complejo. Para determinar cuántas raíces n-ésimas existen, es necesario realizar una inspección. Siendo

$$s = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\varphi + k360°}{n} \ \forall \ k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

se tiene que para $k = 0$

$$s = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\varphi}{n}$$

Para $k = 1$

$$s = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\varphi + 360°}{n}$$

Así sucesivamente hasta que, $k = n - 1$

$$s = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\varphi + (n-1)360°}{n}$$

Para $k = n$

$$s = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\varphi + n360°}{n} \Rightarrow s = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \left(\frac{\varphi}{n} + 360° \right)$$

Para $k = n + 1$

$$s = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\varphi + (n+1)360°}{n} \Rightarrow s = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \left(\frac{\varphi + 360°}{n} + 360° \right)$$

En los últimos dos casos se denota que, por el concepto de igualdad de los números complejos en forma trigonométrica, los números obtenidos para $k = n$ y $k = n + 1$ son iguales a los obtenidos para $k = 0$ y $k = 1$, respectivamente. Esto quiere decir, que para un número complejo existen n raíces n-ésimas, contadas para $k = 0, 1, 2, 3, \dots (n-1)$.

Para todo número natural n, y para todo número complejo $z = r \operatorname{cis} \varphi$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\varphi + k360°}{n}, \qquad \forall\, k = 0, 1, 2, 3, \dots (n-1)$$

EJEMPLO 3.16. Dado el número $z = 64$, calcúlese las tres raíces cúbicas de z.

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{64 \operatorname{cis} 0°}$$

En este caso, $n = 3$ y $k = 0, 1, 2$.

La primera raíz cúbica es $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{64} \operatorname{cis} \frac{0° + (0)360°}{3} \Rightarrow 4 \operatorname{cis} 0°$.

La segunda raíz cúbica es $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{64} \operatorname{cis} \frac{0° + (1)360°}{3} \Rightarrow 4 \operatorname{cis} 120°$.

La tercera raíz cúbica es $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{64} \operatorname{cis} \frac{0° + (2)360°}{3} \Rightarrow 4 \operatorname{cis} 240°$.

Al localizar las raíces en el plano de Argand (véase la figura 3.5) se observa que éstas están colocadas de manera equidistante una de la otra. En general, al momento de dibujar las raíces de un número complejo en el plano se presentará un patrón de equidistancia constante entre todas las raíces.

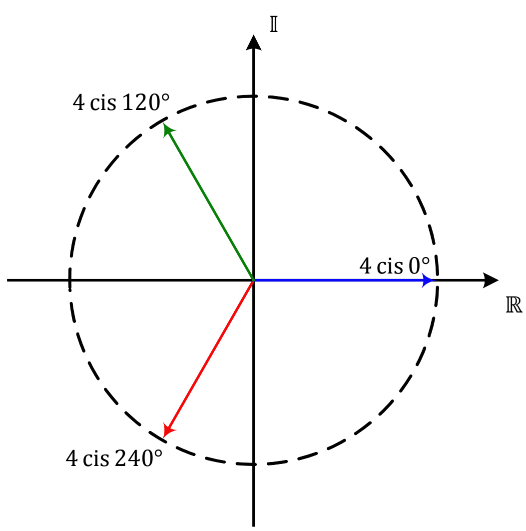

Figura 3.5. Localización de las raíces del ejemplo 3.16.

EJEMPLO 3.17. Calcúlese y dibújese en el plano de Argand las 4 raíces cuartas del número $2 + 2\sqrt{3}i$.

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2 + 2\sqrt{3}i}$$

Ahora se tiene que $n = 4$ y $k = 0, 1, 2, 3$. Pero primero se debe encontrar la forma trigonométrica del número en cuestión, la cual es

$$2 + 2\sqrt{3} = 4 \operatorname{cis} 60°$$

Las cuatro raíces son

$$w_1 = \sqrt[4]{4} \operatorname{cis} \frac{60° + (0)360°}{4} \Rightarrow \sqrt{2} \operatorname{cis} 15°$$
$$w_2 = \sqrt[4]{4} \operatorname{cis} \frac{60° + (1)360°}{4} \Rightarrow \sqrt{2} \operatorname{cis} 105°$$
$$w_3 = \sqrt[4]{4} \operatorname{cis} \frac{60° + (2)360°}{4} \Rightarrow \sqrt{2} \operatorname{cis} 195°$$
$$w_4 = \sqrt[4]{4} \operatorname{cis} \frac{60° + (3)360°}{4} \Rightarrow \sqrt{2} \operatorname{cis} 285°$$

Cuya representación en el plano imaginario se dibuja en la figura. 3.6.

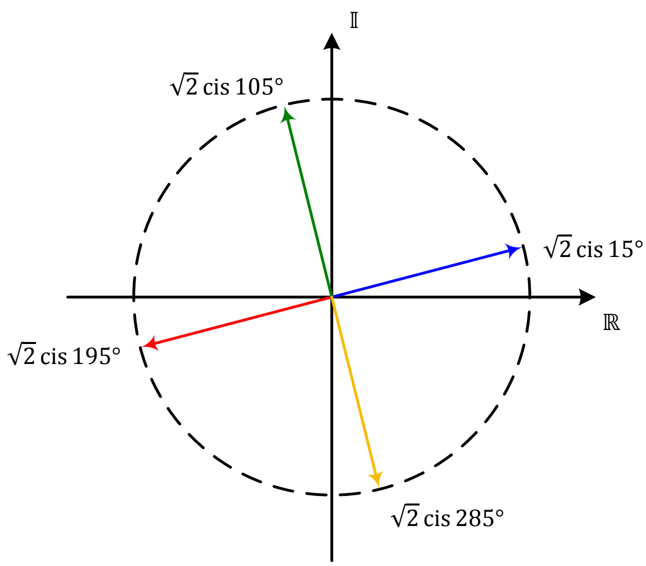

Figura 3.6. Las cuatro raíces cuartas obtenidas en el ejemplo 3.17.

Forma exponencial o de Euler

Leonhard Euler, padre de la unidad imaginaria i, estableció que existe una relación entre las funciones trigonométricas seno y coseno y la base de los logaritmos naturales; es decir, e puede expresarse de la siguiente manera:

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

Esta ecuación permite representar un número complejo que se encuentre escrito en forma trigonométrica; es decir, $z = r \operatorname{cis} \varphi$ puede escribirse como

$$re^{\varphi i} = r \operatorname{cis} \varphi$$

Esta expresión es la llamada **forma de Euler** o **forma exponencial de un número complejo**; en este caso, r representa el módulo del número complejo y φ el argumento expresado en radianes.

Equivalencia entre la forma trigonométrica y la exponencial

La equivalencia entre las formas exponencial y trigonométrica se deduce por medio de las series de Maclaurin para las funciones e^x, $\sin x$ y $\cos x$. La función exponencial puede expresarse como:

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \\ &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \end{aligned}$$

Mientras que las funciones seno y coseno se expresan como:

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{x^1}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \\ &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{x^0}{1!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \\ &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \end{aligned}$$

Los valores de x dentro de la función exponencial pueden ser iguales a φi; por lo tanto, con base en las potencias de i, se desarrolla y reordena

$$\begin{aligned} e^{\varphi i} &= 1+\varphi i+\frac{(\varphi i)^2}{2!}+\frac{(\varphi i)^3}{3!}+\frac{(\varphi i)^4}{4!}+\cdots \\ &= 1+\varphi i-\frac{\varphi^2}{2!}-\frac{\varphi^3}{3!}i+\frac{\varphi^4}{4!}+\frac{\varphi^5}{5!}i+\cdots \\ &= \left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+\cdots\right)+\left(\varphi i-\frac{\varphi^3}{3!}i+\frac{\varphi^5}{5!}i-\frac{\varphi^7}{7!}i+\cdots\right) \end{aligned}$$

La función seno puede multiplicarse por i a ambos lados de la igualdad, quedando como

$$i\sin\varphi = \varphi i-\frac{\varphi^3}{3!}i+\frac{\varphi^5}{5!}i-\frac{\varphi^7}{7!}i+\cdots$$

y finalmente, se pueden igualar la función exponencial con la suma de las funciones seno y coseno, para obtener

$$\begin{aligned} e^{\varphi i} &= \left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+\cdots\right)+\left(\varphi i-\frac{\varphi^3}{3!}i+\frac{\varphi^5}{5!}i-\frac{\varphi^7}{7!}i+\cdots\right) \\ &= \cos\varphi+i\sin\varphi \end{aligned}$$

que es el desarrollo de la función $e^{\varphi i}$ que se expuso anteriormente. Por lo tanto, se verifica que $e^{\varphi i}=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

Operaciones en forma exponencial: multiplicación, división, potenciación y radicación

Debido a que la forma trigonométrica y exponencial son equivalentes, las operaciones de números complejos que pueden realizarse con la forma trigonométrica son las mismas que en la forma exponencial; la diferencia radica en que en esta ocasión se utilizan las leyes de los exponentes para calcular los argumentos, y que es indispensable utilizar radianes en lugar de grados.

Multiplicación y división

La multiplicación de números complejos en forma exponencial se define como

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \left(r_1 e^{\varphi_1 i}\right)\left(r_2 e^{\varphi_2 i}\right) \\ &= (r_1 r_2) e^{\varphi_1 i + \varphi_2 i} \\ &= (r_1 r_2) e^{(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

en tanto que la división, puede expresarse como

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 e^{\varphi_1 i}}{r_2 e^{\varphi_2 i}} \\ &= \frac{r_1}{r_1} e^{(\varphi_1 + \varphi_2) i} \end{aligned}$$

Ambas ecuaciones presentan las mismas características de operabilidad que en la forma trigonométrica de los números complejos.

EJEMPLO 3.18. Sean los números complejos $z_1 = 6e^{\frac{1}{3}\pi i}$ y $z_2 = 3e^{\frac{5}{3}\pi i}$. Calcúlese la multiplicación y la división entre ambos números.

Multiplicación:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 6e^{\frac{1}{3}\pi i} \cdot 3e^{\frac{5}{3}\pi i} \\ &= (6)(3)e^{\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\right)\pi i} \\ &= 18e^{2\pi i} \end{aligned}$$

División:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{6e^{\frac{1}{3}\pi i}}{3e^{\frac{5}{3}\pi i}} \\ &= \frac{6}{3} e^{\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}\right)\pi i} \\ &= 2e^{-\frac{4}{3}\pi i} \\ &= 2e^{\frac{2}{3}\pi i} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.19. Efectúese la operación

$$\left(2e^{\frac{1}{9}\pi i}\right)\left(e^{\frac{1}{6}\pi i}\right)\left(2e^{\frac{7}{18}\pi i}\right)=z$$

Efectuando paso a paso la operación,

$$\begin{aligned} z &= (2)(1)(2)e^{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{7}{18}\right)\pi i} \\ &= 4e^{\left(\frac{2}{18}+\frac{3}{18}+\frac{7}{18}\right)\pi i} \\ &= 4e^{\frac{2}{3}\pi i} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.20. Calcúlese el resultado de dividir $4 \operatorname{cis} 150°$ entre $2e^{\frac{1}{2}\pi i}$.

Como $4 \operatorname{cis} 150° = 4e^{\frac{5}{6}\pi i}$, la operación es

$$\begin{aligned} z &= \frac{4e^{\frac{5}{6}\pi i}}{2e^{\frac{1}{2}\pi i}} \\ &= \frac{4}{2}e^{\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)\pi i} \\ &= 2e^{\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{6}\right)\pi i} \\ &= 2e^{\frac{1}{3}\pi i} \end{aligned}$$

Potenciación y radicación

En lo que se refiere a la potenciación, la expresión en forma exponencial queda como sigue

$$\begin{aligned} z^n &= \left(re^{\varphi i}\right)^n \\ &= (r)^n\left(e^{\varphi i}\right)^n \\ &= r^n e^{n\varphi i} \end{aligned}$$

La radicación se realiza con las mismas leyes vistas en el apartado de radicación en forma trigonométrica, tomando en cuenta que cada número complejo tiene n raíces n-ésimas.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{re^{\varphi i}} \\ &= \sqrt[n]{r}\sqrt[n]{e^{\varphi i}} \\ &= \sqrt[n]{r}e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}i}, \qquad \forall\, k=0,1,2,\dots,(n-1) \end{aligned}$$

Se debe hacer el recordatorio, de que en el caso de la forma exponencial no es posible utilizar grados para denotar al argumento, y es necesario realizar la conversión a radianes cuando se realice el cambio entre formas trigonométrica y exponencial.

EJEMPLO 3.21. Calcúlese la sexta potencia de $z=2e^{\frac{1}{2}\pi i}$ y las cinco raíces quintas de $z=243e^{\frac{3}{2}\pi i}$.

Potenciación:

$$\begin{aligned} z^6 &= \left[2e^{\frac{1}{2}\pi i}\right]^6 \\ &= (2)^6 e^{6\left(\frac{1}{2}\pi i\right)} \\ &= 64e^{3\pi i} \\ &= 64e^{\pi i} \end{aligned}$$

Radicación: los parámetros son $n = 5$ y $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{z} &= \sqrt[5]{243e^{\frac{3}{2}\pi i}} \\ &= \sqrt[5]{243}e^{\frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)i} \\ &= 3e^{\frac{3+4k}{10}\pi i} \end{aligned}$$

La primera raíz es $z = 3e^{\frac{3}{10}\pi i}$.

La segunda raíz es $z = 3e^{\frac{7}{10}\pi i}$.

La tercera raíz es $z = 3e^{\frac{11}{10}\pi i}$.

La cuarta raíz es $z = 3e^{\frac{15}{10}\pi i}$.

La quinta raíz es $z = 3e^{\frac{19}{10}\pi i}$.

EJEMPLO 3.22. Calcúlese, en forma exponencial, $z^{\frac{3}{5}}$ para $z = \cos 120° + i \sin 120°$.

$$\begin{aligned} w &= \sqrt[5]{z^3} \\ &= \sqrt[5]{\left(e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)^3} \\ &= \sqrt[5]{(1)^3 e^{(3)\frac{2}{3}\pi i}} \\ &= \sqrt[5]{e^{2\pi i}} \\ &= \sqrt[5]{1} \\ &= e^{\frac{2k}{5}\pi i} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las raíces buscadas son

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 \\ w_2 &= e^{\frac{2}{5}\pi i} \\ w_3 &= e^{\frac{4}{5}\pi i} \\ w_4 &= e^{\frac{6}{5}\pi i} \end{aligned}$$

$$w_5 = e^{\frac{8}{5}\pi i}$$

Con esto queda resuelto el ejemplo.

Resolución de ecuaciones con una incógnita que involucren números complejos

Dentro de los números complejos también pueden plantearse problemas que se modelan por medio de ecuaciones.

En ese sentido se pueden encontrar los siguientes tipos de ecuaciones con números complejos:

- ✓ Ecuaciones con una o varias incógnitas.
- ✓ Polinomios.
- ✓ Sistemas de ecuaciones.

En sí, la resolución de ecuaciones con números complejos es muy similar a la resolución de ecuaciones algebraicas con números reales. Así por ejemplo, para resolver el polinomio $p(x) = x^2 + (5 - i)x + (6 - 3i)$ es necesario utilizar números complejos debido a que los coeficientes del polinomio son complejos; se puede verificar fácilmente que las raíces son $\alpha_1 = -3$ y $\alpha_2 = -2 + i$.

En otro tipo de ecuaciones, como por ejemplo $z_1 \cdot z = z_2 \cdot z_3 \cdot z^{-1} + z$ con z_1, z_2, z_3 conocidos, es necesario realizar operaciones básicas con los números complejos para encontrar el valor de *z* que satisface la ecuación.

Resolución de ecuaciones con una incógnita

Si se toma la ecuación del apartado anterior, es decir

$$z_1 \cdot z = z_2 \cdot z_3 \cdot z^{-1} + z$$

se puede observar que la incógnita *z* puede despejarse fácilmente. El camino sería el siguiente:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z - z &= z_2 \cdot z_3 \cdot z^{-1} \\ z(z_1 - 1) &= \frac{z_2 \cdot z_3}{z} \\ z \cdot z(z_1 - 1) &= z_2 \cdot z_3 \\ z^2 &= \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 - 1} \\ z &= \sqrt{\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 - 1}} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.22. Si se diesen los valores $z_1 = -i$, $z_2 = 2e^{\pi i}$ y $z_3 = 3(\cos 30° + i \sin 30°)$, el resultado de la ecuación planteada al inicio de este apartado sería

$$z = \sqrt{\frac{2e^{\pi i} \cdot 3(\cos 30° + i \sin 30°)}{-i - 1}}$$

En este caso, es conveniente colocar todos los valores en forma trigonométrica o forma exponencial, para que la operación sea uniforme

$$z=\sqrt{\frac{2e^{\pi i}\cdot 3e^{\frac{1}{6}\pi i}}{\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}}}$$
$$=\sqrt{\frac{6e^{\frac{7}{6}\pi i}}{\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}}}$$
$$=\sqrt{\frac{6}{\sqrt{2}}e^{\frac{11}{12}\pi i}}$$

Finalmente, se tienen dos soluciones para la raíz cuadrada; esas soluciones son

$$z_1=\sqrt{3\sqrt{2}}e^{\frac{11}{24}\pi i},\qquad z_2=\sqrt{3\sqrt{2}}e^{\frac{35}{24}\pi i}$$

En general, no existe un método o una regla que especifique como debe resolverse este tipo de ecuaciones; lo único recomendado es que cuando se presente una suma, es necesario utilizar la forma de binomio del número complejo, y en el caso de que se necesite multiplicar, potenciar o radicalizar se utilice la forma exponencial o la forma trigonométrica.

Otro tipo de ecuaciones planteadas con números complejos implica el resolver la parte imaginaria separada de la parte real; es decir, el número complejo se maneja como dos entidades diferentes, en lugar de un solo elemento.

EJEMPLO 3.23. Sea la ecuación

$$z=\frac{2-ki}{k-i}$$

¿Qué valores de k permiten que z sea

a. un número real puro, y
b. un número imaginario puro?

a. Se debe plantear la realización del cociente de manera normal.

$$\begin{aligned} z &= \frac{2-ki}{k-i}\cdot\frac{k+i}{k+i} \\ &= \frac{2k-k^2i+2i-ki^2}{k^2-ki+ki-i^2} \\ &= \frac{3k+(2-k^2)i}{k^2+1} \\ &= \frac{3k}{k^2+1}+\frac{2-k^2}{k^2+1}i \end{aligned}$$

Para que la última expresión sea un número real puro, la parte imaginaria debe ser cero:

$$\frac{2-k^2}{k^2+1}=0\Rightarrow 2-k^2=0$$

Por lo tanto, los valores buscados son $k = \pm\sqrt{2}$.

b. En este inciso, la parte real debe ser nula para asegurar que z sea un número imaginario.

$$\frac{3k}{k^2+1} = 0 \Rightarrow 3k = 0$$

Finalmente, el valor buscado es $k = 0$.

EJEMPLO 3.24. Encuéntrese los valores $a, b \in \mathbb{R}$ que satisfacen a la ecuación

$$\frac{a+2i}{3+bi} = \sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi i}$$

En este caso, el procedimiento a seguir es realizar el cociente establecido.

$$\begin{aligned}
&\frac{a+2i}{3+bi} = 1 - i \\
&a + 2i = (1-i)(3+bi) \\
&a + 2i = 3 + bi - 3i + b \\
&a + 2i = (3+b) + (b-3)i
\end{aligned}$$

Al utilizar el concepto de igualdad en los números complejos, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}
a &= 3 + b \\
2 &= b - 3
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que $b = 5$ y $a = 8$.