Números Reales

El conjunto de los números naturales

El proceso de contar permite a los seres humanos percibir el concepto de existencia de objetos. El conjunto de los números naturales es el conjunto que se utiliza normalmente para clasificar las cantidades. Se han utilizado desde comienzos del conteo, pero no había habido una forma en la cual se definiera el conjunto más utilizado en la historia de la humanidad.

Concepto intuitivo de número natural

El concepto de número natural es 'natural' para todos los seres humanos: el número natural es aquél que se utiliza para contar, y que puede representarse por símbolos como 1, 2, 3, 4,...

Definición de los números naturales mediante los postulados de Peano

En 1889, un matemático italiano llamado Giusseppe Peano desarrolló cinco postulados que permitieron formalizar la definición de los números naturales. Dichos axiomas establecen lo siguiente:

Sea un conjunto no vacío $\mathbb{N}$, tal que

1. $1 \in \mathbb{N}$.
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, n^* \in \mathbb{N}$, conocido como el siguiente de n.
3. $\forall\, n \in \mathbb{N}, n^* \neq 1$.
4. Si $m, n \in \mathbb{N} \ni m^* = n^* \Rightarrow m = n$.
5. Si cada subconjunto de $K \in \mathbb{N}$ tiene las propiedades
   a. $1 \in K$.
   b. $k \in K, k^* \in K$.

   Significa que $K = \mathbb{N}$.

Estos axiomas definen de manera simple y significativa los números naturales; dichas propiedades son la representación empírica de los números naturales expresadas formalmente.

Con un conjunto numérico es posible definir operaciones; es decir, reglas de correspondencia que permitirán asignar a un par de números otro número del conjunto.

Propiedades: adición, multiplicación y orden en los números naturales

Para definir las operaciones en los números naturales, es necesario apoyarse en los postulados de Peano.

Adición en $\mathbb{N}$

La suma de los números naturales se define, básicamente, por medio de dos axiomas.

1. $n + 1 = n^*, \forall\, n \in \mathbb{N}$
2. $n + m^* = (n + m)^*, \forall\, n + m$ definido.

EJEMPLO 2.1. Se desea sumar 5 más 3. Como se sabe, el resultado es 8. Para demostrarlo se realiza el siguiente procedimiento, utilizando la definición de la adición:

$$\begin{aligned} 5+3 &= 5+2^* \\ &= (5+2)^* \\ &= (5+1^*)^* \\ &= ((5+1)^*)^* \\ &= ((5^*)^*)^* \\ &= (6^*)^* \\ &= (7)^* \\ &= 8 \end{aligned}$$

Propiedades de la adición

Sean $m, n, p \in \mathbb{N}$.

- ✓ Existe la cerradura $m+n \in \mathbb{N}$.
- ✓ Existe la asociación $m+(n+p)=(m+n)+p$.
- ✓ Existe la conmutación $m+n=n+m$.
- ✓ Existe la cancelación, si $m+p=n+p \Rightarrow m=n$.

Multiplicación en $\mathbb{N}$

La multiplicación también se define por medio de dos axiomas, pero toma como base la definición de suma.

1. $n \cdot 1 = n$.
2. $n \cdot m^* = n \cdot m + n$.

EJEMPLO 2.2. En este caso hay que multiplicar 3 por 3, cuyo resultado es 9. Para este ejemplo, se utilizan las definiciones de multiplicación y adición.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 3 &= 3 \cdot 2^* \\ &= 3 \cdot 2 + 3 \\ &= 3 \cdot 1^* + 3 \\ &= (3 \cdot 1 + 3) + 3 \\ &= (3+3)+3 \\ &= 6+3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Propiedades de la multiplicación

Sean $m, n, p \in \mathbb{N}$.

- ✓ Existe la cerradura $m \cdot n \in \mathbb{N}$.
- ✓ Existe la asociación $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$.
- ✓ Existe la conmutación $m \cdot n = n \cdot m$.
- ✓ Existe la cancelación, si $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$.

La adición y la multiplicación pueden conjuntarse para definir la siguiente propiedad:

- ✓ Existe la distribución $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$.

Reunidas, estas propiedades permiten operar los números como se hace naturalmente, y que para todos los seres humanos es un proceso aprendido intuitivamente.

Orden en $\mathbb{N}$

Los números naturales se caracterizan porque son un conjunto ordenado. Este orden se define por medio de la siguiente definición:

Dados dos números naturales m y n, se dice que n es menor que m si se cumple que

$$\exists\, x \in \mathbb{N} \ni n + x = m$$

A partir de aquí, se confirma que se puede obtener una, y sólo una, de las siguientes condiciones para cada pareja de números naturales m y n:

- ✓ $n < m$.
- ✓ $n = m$.
- ✓ $n > m$.

Lo cual señala que la relación entre dos números naturales cualesquiera es única, y no puede contemplar más de un tipo de relación. Esta propiedad es conocida como la ley de la tricotomía.

EJEMPLO 2.3. La ley de la tricotomía se confirma al realizar las siguientes operaciones, dando como resultado el orden en los números naturales:

$$\begin{gathered} 1 + 1 = 2 \Rightarrow 1 < 2 \\ 2 + 1 = 3 \Rightarrow 2 < 3 \\ 3 + 1 = 4 \Rightarrow 3 < 4 \\ \vdots \end{gathered}$$

Con base en la definición de menor, en los números naturales se puede realizar una serie de operaciones, y definir las propiedades de las desigualdades.

Dados tres números naturales n, m, p, se cumple que

- ✓ $n < m \Rightarrow n + p < m + p$
- ✓ $n < m \Rightarrow n \cdot p < m \cdot p$
- ✓ $n < m, m < p \Rightarrow n < p$ (ley de la transitividad).

Esto quiere decir que cualquier operación realizada a una desigualdad no afectará su sentido, siempre y cuando se haga la misma operación a ambos lados del símbolo relacional.

Demostración por inducción matemática

El procedimiento de inducción matemática es una prueba que se realiza a teoremas o expresiones generales a partir de casos particulares. El objetivo de la prueba es verificar que el teorema general sea válido para cualquier caso particular.

Los pasos necesarios para realizar esta prueba son tres; mostrados en el siguiente orden:

1. Demostrar que la proposición siempre es válida para el primer caso particular que cumple el teorema, ya sea $n = 1, n = 2, n = 3$, etc.
2. Asumir que la proposición es válida para cualquier caso particular $n = k$; la expresión resultante se llama hipótesis de inducción, y es siempre es válida.
3. Demostrar que la proposición es válida para cualquier caso particular $n = k + 1$, tomando como base la validez de la hipótesis de inducción; a este paso se le conoce como tesis de inducción.

La inducción matemática es un procedimiento análogo al quinto postulado de Peano. La mayor complejidad para realizar exitosamente un aprueba por inducción matemática es la demostración de la tesis a partir de la hipótesis. De manera general se deben poseer conocimientos sólidos de Álgebra básica, y capacidad de razonamiento, inventiva e imaginación.

EJEMPLO 2.4. Demuéstrese por inducción matemática la propiedad asociativa de la adición en los números naturales.

En este caso, la propiedad nos dice que $\forall\, m, n, p \in \mathbb{N} \rightarrow (m+n)+p = m+(n+p)$. Al tener tres variables sobre las cuales se puede aplicar la prueba de inducción, se debe elegir una de ellas para realizar la demostración; en este caso se tomará p como variable de inducción.

1. Para $P(p = 1)$

$$(m+n)+1 = m+(n+1)$$
$$(m+n)^* = m+n^*$$

que por definición de la adición en los números naturales, se sabe que es verdadera.

2. Para $P(p = k)$

$$(m+n)+k = m+(n+k)$$

que es cierta, ya que es la hipótesis de inducción.

3. Para $P(p = k^*)$

$$(m+n)+k^* = m+(n+k^*)$$

Se necesita demostrar que esta proposición es verdadera.

$$\begin{aligned}
(m+n)+k^* &= m+(n+k^*) && \\
&= m+(n+k)^* && \text{por definición de adición en N} \\
&= [m+(n+k)]^* && \text{por definición de adición en N} \\
&= [(m+n)+k]^* && \text{por hipótesis de inducción} \\
&= (m+n)+k^* && \text{por definición de adición en N}
\end{aligned}$$

En este caso la tesis es verdadera, y la proposición es válida $\forall\, p \in \mathbb{N}$. Para completar la demostración de esta propiedad en la adición, se debe realizar el proceso análogo para los números m y n.

EJEMPLO 2.5. Demuéstrese que la proposición $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2, \forall\, n \in \mathbb{N}$ es válida.

1. Para $P(n=1)$

$$\begin{aligned} 2(1)-1 &= (1)^2 \\ 2-1 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, es verdadera.

2. Para $P(n=k)$

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

Es verdadera, ya que se trata de la hipótesis de inducción.

3. Para $P(n=k+1)$

$$1+3+5+\cdots+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$$

Para demostrar esta proposición, se partirá de la hipótesis para llegar a la tesis. En este caso, se debe sumar el término $(k+1)$ a la hipótesis, y reducir los términos semejantes.

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+(2k-1) &= k^2 \\ 1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1] &= k^2+[2(k+1)-1] \\ &= k^2+2(k+1)-1 \\ &= k^2+2k+2-1 \\ &= k^2+2k+1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la proposición $P(n=k+1)$ es verdadera. Entonces, se llega a la conclusión de que la proposición $P(n)$ es verdadera para cualquier número natural.

EJEMPLO 2.6. Demuéstrese que la proposición $n^2+n, \forall\, n \in \mathbb{N}$ es un número par. Otra forma de definir la proposición es demostrar que n^2+n es divisible entre dos; es decir,

$$\frac{n^2+n}{2} \in \mathbb{Z}, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

1. Para $P(n=1)$

$$\begin{aligned} \frac{(1)^2+1}{2} &= \frac{1+1}{2} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, es verdadera.

2. Para $P(n = k)$

$$\frac{k^2 + k}{2}$$

que es un número par, ya que es la hipótesis de inducción.

3. Para $P(n = k + 1)$

$$\frac{(k + 1)^2 + (k + 1)}{2}$$

En este caso se desarrollará la tesis y reagruparán términos, para después sustituir la hipótesis y demostrar que se tiene un número par.

$$\begin{aligned}\frac{(k + 1)^2 + (k + 1)}{2} &= \frac{(k^2 + 2k + 1) + (k + 1)}{2} \\ &= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} \\ &= \frac{(k^2 + k) + (2k + 2)}{2} \\ &= \frac{k^2 + k}{2} + \frac{2(k + 1)}{2}\end{aligned}$$

El primer sumando es un número par, ya que se trata de la hipótesis de inducción; el segundo sumando también es par, ya que se puede simplificar el dos en el numerador con al dos del denominador; entonces, la suma de ambos es un número entero. Por lo tanto, la proposición $P(n = k + 1)$ es verdadera; y se llega a la conclusión de que la proposición $P(n)$ es verdadera para cualquier número natural.

EJEMPLO 2.7. Demuéstrese que la proposición $(x + 1)^n > x^n + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, x > 0$ es válida.

1. Para $P(n = 1)$

$$\begin{aligned}(x + 1)^1 &> x^1 + 1 \\ x + 1 &= x + 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, no cumple con $n = 1$. Para $P(n = 2)$

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 &> x^2 + 1 \\ x^2 + 2x + 1 &> x^2 + 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, es verdadera debido a que el lado izquierdo tiene un sumando positivo más que el lado derecho; el primer elemento válido para proposición es $n = 2$.

2. Para $P(n = k)$

$$(x + 1)^k > x^k + 1$$

que es verdadera, pues es la hipótesis de inducción.

3. Para $P(n = k + 1)$

$$(x+1)^{k+1} > x^{k+1} + 1$$

En este caso se tomará la hipótesis y multiplicará por el término $(x + 1)$, para después comparar con la tesis por medio de la transitividad.

$$\begin{aligned}(x+1)^k(x+1) &> \left(x^k+1\right)(x+1)\\ (x+1)^{k+1} &> x^{k+1}+x^k+x+1\\ &> \left(x^{k+1}+1\right)+\left(x^k+x\right)\end{aligned}$$

Hasta este paso se tiene que el lado izquierdo de la última desigualdad es el lado izquierdo de la tesis; por lo tanto, el siguiente paso será comprobar que el lado derecho de desigualdad es mayor que el lado derecho de la tesis; es decir,

$$(x+1)^{k+1} > \left(x^{k+1}+1\right)+\left(x^k+x\right) > x^{k+1}+1$$

Haciendo un cambio de variable $x^k + x = a$, y considerando la propiedad de cancelación de las desigualdades

$$\begin{gathered}\left(x^{k+1}+1\right)+a > \left(x^{k+1}+1\right)+0\\ a > 0\end{gathered}$$

Al regresar a la variable original, se llega a

$$x^k + x > 0$$

El término izquierdo es mayor que el derecho, en virtud que se especificó anteriormente que $x > 0$. Por lo tanto, por transitividad, se tiene que la desigualdad

$$(x+1)^{k+1} > \left(x^{k+1}+1\right)+\left(x^k+x\right) > x^{k+1}+1$$

es verdadera. Entonces, la proposición $P(n = k + 1)$ es verdadera; y se llega a la conclusión de que la proposición $P(n)$ es verdadera para cualquier número natural.

El conjunto de los números enteros

Los números naturales es son el conjunto más básico de números; se explicó que nacen de la necesidad del ser humano de contabilizar, y de definir los conceptos de existencia y pluralidad.

Sin embargo, tomando en cuenta las operaciones que pueden realizarse con ellos, presentan una enorme carencia al momento de plantear ecuaciones. Las ecuaciones del tipo

$$n + x = m, \forall\, m, n \in \mathbb{N}$$

Pueden o no presentar soluciones en los números naturales. Por ejemplo, si se tuviese la ecuación particular

$$3 + x = 7$$

Se sabe de antemano que la solución es 4, y que 4 pertenece a los números naturales. Sin embargo, si se tuviese

$$3 + x = 1$$

Se cae en que los números naturales son insuficientes para determinar la solución de la ecuación. Es en este punto que se debe extender el conjunto numérico; esta extensión comprende a los números enteros.

Definición a partir de los números naturales

Para resolver ecuaciones del tipo $n + x = m$ es necesario introducir el concepto de diferencia de los números naturales. Para ello se tiene lo siguiente:

Diferencia en $\mathbb{N}$

Sea la ecuación $n + x = m, \forall\, m, n \in \mathbb{N}$. La solución de la ecuación será un número x, tal que sumado a n dé cómo resultado m; es decir, se tiene que

$$x = m - n$$

A partir de esta definición, y con base en el orden dentro de los números naturales se establecen tres posibles soluciones:

1. $n < m$

Para este caso la solución x es un número natural.

2. $n = m$

En este momento se presenta la primera solución fuera de los números naturales. Por lo tanto, se tiene que la solución de la ecuación es $x = n - n$; de ahí se concluye, que existe un elemento neutro para cada natural, denominado cero y representado por 0.

3. $n > m$

La tercera posibilidad arroja una solución fuera de los números naturales. Este tipo de números se definen como los números negativos y se representan por $x = -(n - m)$, donde $n - m$ es un número natural.

De acuerdo con estos casos, se define a la diferencia de dos números naturales como el conjunto de los **números enteros**, de tal manera que

$$\mathbb{Z} = \{x | x = m - n, \forall\, m, n \in \mathbb{N}\}$$

Ésta es la definición formal del conjunto de los números enteros.

Propiedades: igualdad, adición, multiplicación y orden en los números enteros

Igualdad en $\mathbb{Z}$

Debido a la definición de número entero, es posible representar de diversas maneras la diferencia $m - n$. Por ello, es necesario definir la igualdad en los números enteros.

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Si se define cada número entero como

$$a = m - n$$
$$b = p - q$$

Entonces, se tendrá que

$$a = b \Leftrightarrow m - n = p - q$$

O bien,

$$m + q = n + p$$

Adición en $\mathbb{Z}$

Puesto que los enteros son una extensión de los naturales, se intuye que heredarán propiedades y operaciones que son válidas en el conjunto de los número naturales.

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Si se define cada número entero como

$$a = m - n$$
$$b = p - q$$

La adición en $\mathbb{Z}$, se define como

$$\begin{aligned} a + b &= (m - n) + (p - q) \\ &= m - n + p - q \\ &= m + p - n - q \\ &= (m + p) - (n + q) \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.8. Se desea sumar 4 más 6. Ambos números se pueden representar como

$$4 = 7 - 3$$
$$6 = 8 - 2$$

Aplicando la definición de suma se tiene que

$$\begin{aligned} 4 + 6 &= (7 - 3) + (8 - 2) \\ &= (7 + 8) - (3 + 2) \\ &= 15 - 5 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Propiedades de la adición

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

- ✓ Existe la cerradura $a + b \in \mathbb{Z}$.
- ✓ Existe la asociación $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- ✓ Existe la conmutación $a + b = b + a$.
- ✓ Existe la cancelación, si $a + c = b + c \Rightarrow a = b$.
- ✓ Existe un elemento neutro, tal que $a + 0 = a$.

✓ Existe un elemento inverso, tal que $a + (-a) = 0$.

Para la diferencia de número enteros se utiliza el concepto de adición. Sea $a, b \in \mathbb{Z}$, la diferencia se define como

$$a - b = a + (-b)$$

Multiplicación en $\mathbb{Z}$

La multiplicación en los enteros se define de manera similar a la adición.

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Si se define cada número entero como

$$\begin{aligned} a &= m - n \\ b &= p - q \end{aligned}$$

La multiplicación en $\mathbb{Z}$, se define como

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (m - n) \cdot (p - q) \\ &= mp - mq - np + nq \\ &= mp + nq - mq - np \\ &= (mp + nq) - (mq + np) \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.9. Se desea multiplicar 4 por -2. Ambos números se pueden representar como

$$\begin{aligned} 4 &= 5 - 1 \\ -2 &= 6 - 8 \end{aligned}$$

Aplicando la definición de multiplicación se tiene que

$$\begin{aligned} (4)(-2) &= (5 - 1)(6 - 8) \\ &= 30 - 40 - 6 + 8 \\ &= (30 + 8) - (40 + 6) \\ &= 38 - 46 \\ &= -8 \end{aligned}$$

Propiedades de la multiplicación

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

✓ Existe la cerradura $a \cdot b \in \mathbb{Z}$.
✓ Existe la asociación $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
✓ Existe la conmutación $a \cdot b = b \cdot a$.
✓ Existe la cancelación, si $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$.
✓ Existe un elemento neutro, tal que $a \cdot 1 = a$.

La adición y la multiplicación pueden conjuntarse para definir la siguiente propiedad:

✓ Existe la distribución $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Además, dentro de los números enteros se define una serie de reglas para reconocer el signo que cada número debe poseer, y que es una extensión de la propiedad de cerradura de la multiplicación.

Para todo número $a, b \in \mathbb{Z}$, se cumple que

1. $a \cdot 0 = 0$
2. $(a) \cdot (-b) = -(ab)$ primera regla de los signos
3. $(-a)(-b) = ab$ segunda regla de los signos

Orden en $\mathbb{Z}$

Para los números enteros, también se puede definir un orden dentro de ellos. Se puede definir dicho orden a partir de la definición de menor que, en los números naturales.

Dados dos números enteros a y b,

$$a < b \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{Z} \ni a + x = b$$

Esta definición también incluye el cumplimiento de la ley de la tricotomía.

Las propiedades de las desigualdades se cumplen de la siguiente manera en los números enteros. Dados tres números enteros a, b, c, se cumple que

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.
2. $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c, \forall\, c > 0$.
   $a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c, \forall\, c < 0$.
3. $a < b, b < c \Rightarrow a < c$ (ley de transitividad).

Finalmente, hay que tomar en cuenta que en el conjunto de los números enteros se definen enteros positivos y negativos.

Sea $a \in \mathbb{Z}$.

1. El número a es positivo si $a > 0$.
2. El número a es negativo si $a < 0$.
3. El número 0 es neutro.

El conjunto de los números racionales

Al igual que los números naturales, los números enteros presentan deficiencias al momento de plantearse ecuaciones con ellos. En este caso, si se llegase a tener la ecuación

$$bx = a, \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$$

Se observa que la solución de la ecuación no siempre será un entero. Por ejemplo, teniendo la ecuación

$$3x = 9$$

La solución es 3. Pero en la ecuación

$$3x = 8$$

Se tiene una solución numérica que no pertenece al conjunto de los números enteros. Por lo tanto, es necesario hacer una segunda extensión a los conjuntos numéricos; de la misma forma que se hizo en los naturales, se realizará en los enteros.

Definición a partir de los números enteros

Las ecuaciones del tipo $bx = a$ necesitan un concepto nuevo conocido como el cociente de los números enteros.

Cociente en $\mathbb{Z}$

Sea la ecuación $bx = a, \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$. La solución de la ecuación será un número x, tal que multiplicado a b dé como resultado a; es decir, se expresa que

$$x = \frac{a}{b}$$

Con esta definición, se observan tres casos específicos para obtener una solución del cociente de los números enteros:

1. El número b es factor de a. Por lo tanto, el cociente de los números a y b será un número entero.
2. El número b no es factor de a, y $b \neq 0$. Esto quiere decir que la solución no es un número entero.
3. El número $b = 0$. Se distinguen dos posibilidades para este caso:
   - $a \neq 0$. El cociente no existe.
   - $a = 0$. El cociente está indeterminado.

De acuerdo con estos casos, se puede deducir que el cociente de dos números enteros conforma al conjunto de los **números racionales**, de tal manera que

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \middle| x = \frac{a}{b}, \forall\, a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}$$

Así es como se define al conjunto de los números racionales.

La inexistencia de la división entre cero se puede demostrar por un método llamado demostración por contradicción, o demostración por reducción al absurdo. Sean $a, b \in \mathbb{Z}, a = b \Rightarrow a - b = 0$. A partir de esta consideración se tiene:

$$\begin{aligned}
a &= b \\
a^2 &= ab && \text{se multiplica por } a \text{ a ambos lados} \\
a^2 - b^2 &= ab - b^2 && \text{restando } b^2 \text{ a ambos lados} \\
(a+b)(a-b) &= b(a-b) && \text{obteniendo los respectivos factores} \\
\frac{(a+b)(a-b)}{a-b} &= \frac{b(a-b)}{a-b} && \text{dividiendo entre } a-b \\
a+b &= b && \text{sustituyendo } a = b \\
b+b &= b \\
2b &= b
\end{aligned}$$

Finalmente, el procedimiento lleva a un resultado absurdo, el cual aparece debido al realizar una división entre 0; se concluye que el cociente entre 0 no está definido.

Igualdad en $\mathbb{Q}$

Al igual que en los enteros es posible representar de diversas maneras la diferencia $m-n$, el cociente a entre b puede representarse por diferentes números enteros. La igualdad en los números racionales especifica lo siguiente.

Sean $\frac{a}{b},\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ y $a,b,c,d \in \mathbb{Z}, b,d \neq 0$. Entonces, se tendrá que

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$$

Adición en $\mathbb{Q}$

Para los números racionales también puede definirse la operación de adición; esto quiere decir que heredarán las propiedades válidas en el conjunto de los números enteros.

Sean $\frac{a}{b},\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ y $a,b,c,d \in \mathbb{Z}, b,d \neq 0$. La adición en $\mathbb{Q}$, se establece como

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

EJEMPLO 2.10. Se desea sumar $\frac{2}{3}$ más $\frac{1}{4}$. Si se aplica la definición de suma se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}+\frac{1}{4}&=\frac{2\cdot 4+3\cdot 1}{3\cdot 4}\\&=\frac{8+3}{12}\\&=\frac{11}{12}\end{aligned}$$

Propiedades de la adición

Sean $x,y,z \in \mathbb{Q}$.

- ✓ Existe la cerradura $x+y \in \mathbb{Q}$.
- ✓ Existe la asociación $(x+y)+z=x+(y+z)$.
- ✓ Existe la conmutación $x+y=y+x$.
- ✓ Existe la cancelación, si $x+z=y+z \Rightarrow x=y$.
- ✓ Existe un elemento neutro, tal que $x+0=x$.
- ✓ Existe un elemento inverso, tal que $x+(-x)=0$.

La sustracción de números racionales se define a partir de la adición. Sean $\frac{a}{b},\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}, b,d \neq 0$, su diferencia se define como

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\left(\frac{-c}{d}\right)$$

Multiplicación en $\mathbb{Q}$

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ y $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b, d \neq 0$. La multiplicación en $\mathbb{Q}$, se define como

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

EJEMPLO 2.11. Se desea multiplicar $\frac{4}{5}$ por $-\frac{3}{2}$. Aplicando la definición de multiplicación se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{4}{5}\left(\frac{-3}{2}\right) &= \frac{(4)(-3)}{(5)(2)} \\ &= \frac{-12}{10} \\ &= -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

Propiedades de la multiplicación

Sean $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

- ✓ Existe la cerradura $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.
- ✓ Existe la asociación $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- ✓ Existe la conmutación $x \cdot y = y \cdot x$.
- ✓ Existe la cancelación, si $x \cdot z = y \cdot z \Rightarrow x = y$.
- ✓ Existe un elemento neutro, tal que $x \cdot 1 = x$.
- ✓ Existe un elemento inverso, tal que $x \cdot x^{-1} = 1, \forall\, x \neq 0$.

La adición y la multiplicación pueden conjuntarse para definir la siguiente propiedad:

- ✓ Existe la distribución $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

El cociente de dos números racionales puede obtenerse a partir de la definición de multiplicación. Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}, c, b, d \neq 0$, su cociente se define como

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Dentro de los números racionales también se definen las reglas de los signos que se observaron en los números enteros. Para todo número $x, y \in \mathbb{Q}$, se cumple que

1. $x \cdot 0 = 0$
2. $(x) \cdot (-y) = -(xy)$ primera regla de los signos
3. $(-x)(-y) = xy$ segunda regla de los signos

Orden en $\mathbb{Q}$

Los números racionales, cumplen un orden dentro de ellos; éste se puede definir a partir del orden los números enteros.

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}, b, d > 0$.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$$

En consecuencia, también se cumple la ley de la tricotomía.

Las propiedades de las desigualdades en los números racionales estipulan que dados tres números racionales x, y, z, se cumple que

1. $x < y \Rightarrow x + z < y + z$.
2. $x < y \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z, \forall\, z > 0$.
   $x < y \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z, \forall\, z < 0$.
3. $x < y, y < z \Rightarrow x < z$ (ley de transitividad).

Finalmente, hay que tomar en cuenta que en el conjunto de los números enteros se definen enteros positivos y negativos.

Sea $x \in \mathbb{Q}$.

1. El número x es positivo si $x > 0$.
2. El número x es negativo si $x < 0$.
3. El número 0 es neutro.

Algoritmo de la División

Expresión decimal de un número racional

Cualquier número racional representa un cociente. Ese cociente, al realizarse, dará como resultado una expresión que tiene una parte entera y una parte decimal. Por ejemplo, si se divide 3 entre 2 se tendrá que $\frac{3}{2} = 1.5$; si se divide 7 entre 3 se tendrá que $\frac{7}{3} = 2.3333333\overline{3}$. Es decir, cualquier número racional se puede representar como una expresión entera más una expresión decimal.

El decimal es periódico cuando un grupo de dígitos se repite de manera indefinida a partir de un determinado lugar a la derecha del punto decimal. Como se observa en el ejemplo de 7 entre 3, a la derecha del punto se encuentra únicamente el número tres; si se continúa realizando la división se observará que no tendrá fin. En el caso de 3 entre 2, el decimal es periódico, ya que el grupo de dígitos repetidos indefinidamente es 0: $\frac{3}{2} = 1.5 \rightarrow 1.50000000\overline{0}$. En conclusión, todo número racional tiene una expresión decimal periódica. Para obtener dicha expresión decimal se tiene el algoritmo de la división de los números enteros.

Dados dos números a y b, con $b > 0$, existen dos enteros únicos q y r, con $0 \leq r < b$, tales que

$$a = bq + r$$

Para los números racionales, la representación de la división sería:

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$$

EJEMPLO 12. El cociente $\frac{149}{132}$ se puede representar como una expresión decimal periódica; es decir, se debe realizar la división de 149 entre 132. Para ello se recurre al algoritmo de la división.

1. Para obtener la parte entera se sabe que

$$\frac{149}{132} = 1 + \frac{17}{132} \Rightarrow 149 = 132(1) + 17 \ldots (1)$$

2. Para la primera cifra decimal, se multiplica $\frac{17}{132}$ por 10 y se realiza la división

$$\frac{170}{132} = 1 + \frac{38}{132} \Rightarrow 170 = 132(1) + 38$$

Para no alterar la expresión original, se debe dividir entre 10

$$\frac{17}{132} = \frac{1}{10} + \frac{38}{(10)(132)} \ldots (2)$$

3. Para la segunda cifra decimal, se multiplica $\frac{38}{(10)(132)}$ por 100 y se realiza la división

$$\frac{380}{132} = 2 + \frac{116}{132} \Rightarrow 380 = 132(2) + 116$$

Para no alterar la expresión original, se debe dividir entre 100

$$\frac{38}{(10)(132)} = \frac{2}{10^2} + \frac{116}{(10^2)(132)} \ldots (3)$$

4. Para la tercera cifra decimal, se multiplica $\frac{116}{(10^2)(132)}$ por 1000 y se realiza la división

$$\frac{1160}{132} = 8 + \frac{104}{132} \Rightarrow 1160 = 132(8) + 104$$

Para no alterar la expresión original, se debe dividir entre 1000

$$\frac{116}{(10^2)(132)} = \frac{8}{10^3} + \frac{104}{(10^3)(132)} \ldots (4)$$

5. Para la cuarta cifra decimal, se multiplica $\frac{104}{(10^3)(132)}$ por 10000 y se realiza la división

$$\frac{1040}{132} = 7 + \frac{116}{132} \Rightarrow 1040 = 132(7) + 116$$

Para no alterar la expresión original, se debe dividir entre 10000

$$\frac{104}{(10^3)(132)} = \frac{7}{10^4} + \frac{116}{(10^4)(132)} \ldots (5)$$

6. Para la quinta cifra decimal, se multiplica $\frac{116}{(10^4)(132)}$ por 100000 y se realiza la división

$$\frac{1160}{132} = 8 + \frac{104}{132} \Rightarrow 1160 = 132(8) + 104$$

Para no alterar la expresión original, se debe dividir entre 100000

$$\frac{116}{(10^4)(132)} = \frac{8}{10^5} + \frac{104}{(10^5)(132)} \dots (6)$$

7. Para la sexta cifra decimal, se multiplica $\frac{104}{(10^5)(132)}$ por 1000000 y se realiza la división

$$\frac{1040}{132} = 7 + \frac{116}{132} \Rightarrow 1040 = 132(7) + 116$$

Para no alterar la expresión original, se debe dividir entre 1000000

$$\frac{104}{(10^5)(132)} = \frac{7}{10^6} + \frac{116}{(10^6)(132)} \dots (7)$$

A partir del paso seis se observa que el período decimal ha comenzado. Esto quiere decir que a partir del tercer decimal el grupo de dígitos 87 se repetirá indefinidamente. Para obtener la expresión decimal, se realiza la siguiente serie de sustituciones: (7) en (6), (6) en (5), y así sucesivamente hasta llegar a sustituir en la expresión (1).

$$\begin{aligned}\frac{149}{132} &= 1 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{8}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \frac{8}{10^7} + \frac{7}{10^8} + \cdots \\ &= 1.128787\overline{87}\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.13. Divídase, por medio del algoritmo de la división, 10 entre 33.

$$\begin{aligned}\frac{10}{33} &= 0 + \frac{10}{33} \\ &= 0 + \frac{100}{33(10)} \\ &= 0 + \frac{3}{10} + \frac{1}{330} \\ &= 0 + \frac{3}{10} + \frac{100}{330(100)} \\ &= 0 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{100}{33000} \\ &= 0 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{100000}{33000(1000)} \\ &= 0 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{1000}{33000000} \\ &= 0.3030\overline{30}\end{aligned}$$

Si un número racional puede expresarse como un decimal periódico, entonces un decimal periódico puede mostrarse como un número racional; es decir, un cociente de dos enteros.

EJEMPLO 2.14. Suponiendo que el número $1.406666\overline{6}$ representa a un cociente de dos enteros, éste se puede representar como

$$\frac{a}{b} = 1.4066666\overline{6}$$

Existen dos dígitos antes de que comience el período, esto quiere decir que se debe multiplicar a ambos lados de la igualdad por 100; si se tuviese un número n de dígitos antes del período decimal, se multiplicaría por 10^n.

$$100\frac{a}{b} = 140.66666\overline{6} \ldots (1)$$

La longitud del período sólo tiene un dígito, por lo tanto se debe multiplicar la expresión (1) por 10; si la longitud tuviese m dígitos, se debe multiplicar por 10^m.

$$1000\frac{a}{b} = 1406.66666\overline{6} \ldots (2)$$

Ahora se debe restar la ecuación (1) de (2), y de ahí se despeja el número $\frac{a}{b}$; es decir,

$$\begin{aligned} 1000\frac{a}{b} - 100\frac{a}{b} &= 1406.66666\overline{6} - 140.66666\overline{6} \\ 900\frac{a}{b} &= 1266 \\ \frac{a}{b} &= \frac{1266}{900} \Rightarrow \frac{211}{150} \end{aligned}$$

Esto quiere decir que toda expresión decimal periódica representa a un número racional.

EJEMPLO 2.15. ¿Cuál es la representación en forma de cociente de $0.1212\overline{12}$?

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= 0.1212\overline{12} \\ 100\frac{a}{b} &= 12.1212\overline{12} \\ 100\frac{a}{b} - \frac{a}{b} &= 12.1212\overline{12} - 0.1212\overline{12} \\ 99\frac{a}{b} &= 12 \\ \frac{a}{b} &= \frac{12}{99} \Rightarrow \frac{4}{33} \end{aligned}$$

Densidad de los números racionales

Los números naturales pueden representarse gráficamente en un arreglo conocido como la recta numérica (figura 2.1). En este caso, se tendría que cada número se localizaría con puntos equidistantes entre sí; y dado cualquier punto, su siguiente sería el punto a su inmediata derecha.

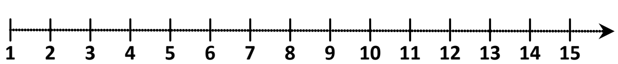

Figura 2.1. Recta numérica natural.

Para los números enteros la representación gráfica es la misma, con la salvedad de que el centro de la recta numérica es el 0, y a la izquierda se dibujan los números negativos, como se muestra en la figura 2.2.

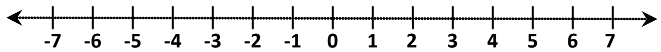

Figura 2.2. Recta numérica entera.

En este caso los números racionales también pueden representarse en la recta numérica. Al introducirse estos números se observa que la recta 'se densifica'; es decir, en lugar de ser puntos espaciados, se vuelve una línea recta casi completa (figura 2.3).

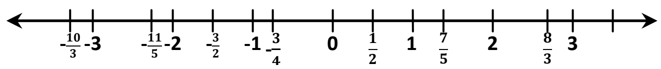

Figura 2.3. Recta numérica racional.

Esta propiedad se llama densidad de los números racionales, en la cual se establece que entre dos números racionales siempre existe otro número racional.

La densidad establece que $\forall\, x, y \in \mathbb{Q}$, con $x < y, \exists\, z \in \mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$. Si se toma la relación $x < y$ se pueden establecer los siguientes procedimientos:

$$\begin{array}{rl}
x < y & \text{se suma } y \text{ a ambos lados} \\
x + y < y + y & \text{se divide entre 2 a ambos lados} \\
\frac{1}{2}(x + y) < \frac{1}{2}(y + y) & \text{se simplifica el lado derecho} \\
\frac{1}{2}(x + y) < y \ldots (1) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
x < y & \text{se suma } x \text{ a ambos lados} \\
x + x < y + x & \text{se divide entre 2 a ambos lados} \\
\frac{1}{2}(x + x) < \frac{1}{2}(x + y) & \text{se simplifica el lado izquierdo} \\
x < \frac{1}{2}(x + y) \ldots (2) &
\end{array}$$

De (1) y (2) y la propiedad de transitividad se tiene que

$$x < \frac{1}{2}(x + y) < y$$

Donde $\frac{1}{2}(x + y)$ es el número z buscado. Los números naturales y enteros no poseen la propiedad de densidad, debido a que el cociente no está definido en ellos.

El conjunto de los números reales

Ahora se planteará el siguiente problema: se desea obtener la posible solución de la ecuación $x^2 - 3 = 0$. Al realizar el despeje y operaciones correspondientes se llegará a que la solución de la ecuación es $x = \sqrt{3}$. El número solución no es racional, ya que no proviene del cociente de dos números enteros. Nuevamente, es necesario hacer una nueva expansión a los conjuntos numéricos.

Existencia de los números irracionales

Se asume que la ecuación $x^2 - 3 = 0$ tiene solución en los números racionales; es decir, $x = \sqrt{3}$ puede representarse como el cociente $\frac{a}{b}$, reducido a su mínima expresión.

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^2 &= 3\\ a^2 &= 3b^2\end{aligned}$$

En este caso como a y b son enteros, sus cuadrados también serán enteros; por lo tanto, 3 es un divisor de a^2; es decir, 3 es un divisor de a (puede demostrarse fácilmente por inducción matemática). Ahora, se reescribe $a = 3c$; entonces

$$3c^2 = b^2$$

Por lo tanto, 3 es un divisor de b^2, y en consecuencia, 3 es un divisor de b. Esto contradice el planteamiento inicial, en el cual el cociente $\frac{a}{b}$ es la mínima expresión de $\sqrt{3}$.

Existen otros números que presentan la misma naturaleza que $\sqrt{3}$ (como $\sqrt{2}, -\sqrt[3]{5}, \sqrt[7]{7}, \ldots$), y que son producto de la resolución de ecuaciones. Además, hay otros números que tampoco pueden representarse como el cociente de dos números enteros, y que no son soluciones de ecuaciones; como ejemplos, están los números π ó e, entre otros. Estos números son conocidos como el conjunto de los números irracionales; llamados así porque no pueden representarse como un cociente de dos números enteros, y por lo tanto, no tienen una representación decimal periódica.

EJEMPLO 2.16. Algunos números irracionales famosos, y los más frecuentemente utilizados son:

$$\begin{aligned} e &= 2.718281828459045235360287471348 9\ldots\\ \pi &= 3.1415926535897932384626433832795\ldots\\ \sqrt{2} &= 1.4142135623730950488016887242097\ldots\\ \sqrt{3} &= 1.7320508075688772935274463415059\ldots\end{aligned}$$

Definición del conjunto de los números reales; representación en la recta numérica

Al conjunto formado por los números racionales y los irracionales se le conoce como el conjunto de los **números reales**. Este es el máximo conjunto que puede representarse en la recta numérica; por lo tanto, a cada número real le corresponde un, y sólo un, punto en la recta, y viceversa (véase la figura 2.4).

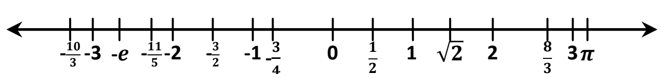

Figura 2.4. Recta numérica real.

A los números reales se les representa como

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= \{x | -\infty < x < \infty\}\\ &= \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'\end{aligned}$$

Debido a la construcción de los conjuntos numéricos se puede expresar que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Es interesante hacer notar que la definición del conjunto de los números reales es un tema que requiere conocimientos sólidos en teoría de conjuntos. El matemático alemán Julius Wilhelm Dedekind formalizó la construcción de éste conjunto numérico al plantear lo que se conoce como cortaduras de Dedekind.

Propiedades: igualdad, adición, multiplicación y orden en los reales

Cortaduras de Dedekind

Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{Q}$. $\mathcal{A}$ es una cortadura de Dedekind si cumple las siguientes propiedades:

- ✓ $\mathcal{A} \neq \emptyset$.
- ✓ $\mathcal{A} \neq \mathbb{Q}$.
- ✓ Si $a \in \mathcal{A}$ y $b < a$, entonces $b \in \mathcal{A}$.
- ✓ $\mathcal{A}$ no tiene último elemento; es decir, $\mathcal{A}$ es un conjunto abierto por la izquierda.

El conjunto de todas las cortaduras es (por definición) el conjunto de los números reales.

Ahora, sea $r \in \mathbb{Q}$. Se denomina cortadura racional (asociada a r) a la cortadura

$$\mathcal{A}_r = \{a \in \mathbb{Q} | a < r\}$$

Es decir, la cortadura racional está asociada a un número racional, que es el elemento supremo del conjunto; más adelante se dará la definición exacta de elemento supremo.

Igualdad en $\mathbb{R}$

Dados las cortaduras racionales

$$\mathcal{A}_\alpha = \{a \in \mathbb{Q} | a < \alpha\}$$
$$\mathcal{B}_\beta = \{b \in \mathbb{Q} | b < \beta\}$$

La igualdad entre números reales se da si $\alpha = \beta \Leftrightarrow \mathcal{A}_\alpha = \mathcal{B}_\beta$.

Adición y multiplicación en $\mathbb{R}$

Dadas dos cortaduras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, su suma está representada como el conjunto

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{a + b | a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$$

que resulta ser una cortadura denominada suma en los números reales.

El producto de cortaduras no es simple como la suma, ya que es necesario identificar diferentes casos (dichos casos obedecen a las leyes de los signos). Pero antes de comenzar con dichos casos, se define que el cero real es la cortadura racional

$$\mathcal{A}_0 = \{r \in \mathbb{Q} | r < 0\}$$

Sean las cortaduras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Si

- ✓ $\mathcal{A},\mathcal{B} > \mathcal{A}_0$, el producto se define como $\mathcal{AB} = \{ab|a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}; a \geq 0, b \geq 0\} \cup \mathcal{A}_0$; por lo que la cortadura $\mathcal{AB} > \mathcal{A}_0$.
- ✓ $\mathcal{A} > \mathcal{A}_0, \mathcal{B} < \mathcal{A}_0$, el producto se define como $\mathcal{A}(-\mathcal{B}) = -(\mathcal{AB})$; por lo que la cortadura $\mathcal{A}(-\mathcal{B}) < \mathcal{A}_0$.
- ✓ $\mathcal{A} < \mathcal{A}_0, \mathcal{B} > \mathcal{A}_0$, el producto se define como $(-\mathcal{A})\mathcal{B} = -(\mathcal{AB})$; por lo que la cortadura $(-\mathcal{A})\mathcal{B} < \mathcal{A}_0$.
- ✓ $\mathcal{A},\mathcal{B} < \mathcal{A}_0$, el producto se define como $(-\mathcal{A})(-\mathcal{B}) = \mathcal{AB}$; y la cortadura $(-\mathcal{A})(-\mathcal{B}) > \mathcal{A}_0$.
- ✓ $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$ ó $\mathcal{B} = \mathcal{A}_0$, el producto se define como $\mathcal{AB} = \mathcal{A}_0$.

En cualquier caso, el producto $\mathcal{AB}$ es una cortadura conocida como multiplicación de los números reales.

Propiedades de la adición y la multiplicación

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- ✓ Existe la cerradura $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$; $\alpha\beta \in \mathbb{R}$.
- ✓ Existe la asociación $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$; $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.
- ✓ Existe la conmutación $\alpha + \beta = \beta + \alpha$; $\alpha\beta = \beta\alpha$.
- ✓ Existe la cancelación, si $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$; $\alpha\gamma = \beta\gamma \Rightarrow \alpha = \beta$.
- ✓ Existe un elemento neutro, tal que $\alpha + 0 = \alpha$; $\alpha \cdot 1 = \alpha$.
- ✓ Existe un elemento inverso, tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$; $\alpha\alpha^{-1} = 1, \forall\, \alpha \neq 0$.
- ✓ Existe la distribución $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

La sustracción y el cociente de números reales se definen a partir de la adición y multiplicación respectivamente. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- ✓ $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$
- ✓ $\alpha \div \beta = \alpha \cdot \beta^{-1}, \forall\, \beta \neq 0$

Orden en $\mathbb{R}$

Dadas las cortaduras

$$\mathcal{A}_\alpha = \{a \in \mathbb{Q} | a < \alpha\}$$
$$\mathcal{B}_\beta = \{b \in \mathbb{Q} | b < \beta\}$$

Si $\alpha < \beta$, entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. En consecuencia, también se cumple la ley de la tricotomía.

Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, las propiedades del orden son:

1. $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$.
2. $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma, \forall\, \gamma > 0$.
   $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma, \forall\, \gamma < 0$.
3. $\alpha < \beta, \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$ (ley de transitividad).

Los números racionales también pueden definirse como positivos y negativos.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. El número α es positivo si $\alpha > 0$.

2. El número α es negativo si $\alpha < 0$.
3. El número 0 es neutro.

Completitud de los reales

Al igual que cada conjunto numérico, los reales tienen propiedades especiales que sólo ellos pueden cumplir. Estas propiedades son las cotas, los elementos máximo y supremo, y la completitud.

Cotas superiores e inferiores

Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$. Un número $t \in \mathbb{R}$ es una cota superior de S, si $x \leq t, \forall\, x \in S$; un número $u \in \mathbb{R}$ es una cota superior de S, si $u \leq x, \forall\, x \in S$. Se deduce que cualquier número real mayor que t ó menor que u, será una cota superior o inferior, respectivamente.

Máximo

Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$. Un número $m \in \mathbb{R}$ es el elemento máximo de S, si $x \leq m, \forall\, x \in S$ y $m \in S$; se denota como $\max S = m$. Por lo tanto, un elemento de S es máximo si es una cota superior, y además pertenece a S.

Supremo

Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$. Un número $p \in \mathbb{R}$ es el elemento supremo de S, si $x \leq p, \forall\, x \in S$ y $p \in C$ tal que $C = \{q | x \leq q, \forall\, x \in S\}$; ee denota como $\sup S = p$. Es decir, un elemento es supremo de S si es la menor cota superior.

EJEMPLO 2.17. Sea el conjunto $A = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq 2\}$.

Este conjunto está acotado superiormente; su elemento máximo es 2; su supremo también es 2. De manera gráfica se tiene lo mostrado en la figura 2.5.

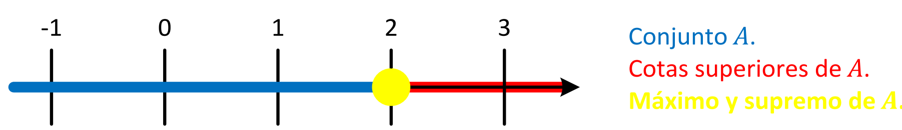

Figura 2.5. Elementos del conjunto del ejemplo 2.15.

EJEMPLO 2.18. Sea el conjunto $B = \{x | x \in \mathbb{R}, -3 < x < 1\}$.

Este conjunto está acotado tanto superior como inferiormente; no tiene elemento máximo y su supremo es 1. Su representación gráfica se muestra en la figura 2.6.

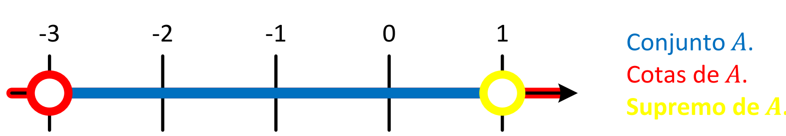

Figura 2.6. Elementos del conjunto del ejemplo 2.16.

Completitud

La completitud en los números reales indica que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que está acotado superiormente tiene un supremo que pertenece a $\mathbb{R}$. Esto quiere decir, que se garantiza la existencia de una mínima cota superior para cualquier conjunto de números reales acotado superiormente, y establece que esa mínima cota es un número real.

Definición y propiedades del valor absoluto

Puesto que los números reales pueden representarse en una recta, y la recta es un elemento geométrico, entonces debe existir una condición geométrica para los números reales. Dicha condición incluye el concepto de distancia entre dos puntos; dicha distancia es conocida algebraicamente como el **valor absoluto de un número real**.

Sea α un número real. El valor absoluto de α es

$$|\alpha| = \begin{cases} -\alpha, & \alpha < 0 \\ \alpha, & \alpha \geq 0 \end{cases}$$

El valor absoluto siempre será un número positivo o nulo; presenta las siguientes propiedades.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. $|\alpha| \geq 0$.
2. $|\alpha|^2 = \alpha^2$.
3. $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$.
4. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

El valor absoluto representa la distancia entre cualquier número real y el cero. Debido a esta situación, si α es un número real positivo, se tendrá que un punto x está situado entre $-\alpha$ y α, si y sólo si $|x| < \alpha$; por lo que

$$|x| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha$$

Por otro lado, si x está situado antes de $-\alpha$ o después de α, significa que $|x| > \alpha$; por lo tanto, se tendrá que

$$|x| > \alpha \Leftrightarrow x < -\alpha \text{ ó } \alpha < x$$

Resolución de desigualdades

Una de las aplicaciones más prácticas de los números reales son las desigualdades, las cuales se basan en las propiedades y conceptos inherentes a la relación ‘menor que’ del orden de los números reales.

A diferencia de las igualdades, las desigualdades tienen un intervalo solución en lugar de una solución única. Los intervalos son una representación compacta y muy útil al momento de presentar la solución de una desigualdad.

Intervalo

El intervalo es un subconjunto de los números reales que está acotado superior, inferiormente o en ambos sentidos. Existen dos tipos de intervalos: abiertos, y cerrados. Los intervalos abiertos son aquéllos que no tienen un elemento máximo o mínimo, y están relacionados con los símbolos $>$ y $<$; en cambio, los cerrados sí tienen un elemento de esta naturaleza y se relacionan con los símbolos $\leq$ y $\geq$.

EJEMPLO 2.19. Dado el conjunto X, que es un subconjunto de $\mathbb{R}$, se tienen los siguientes intervalos:

1.	$X = \{x \mid -2 < x < 1\}$	X es abierto a ambos lados.	$x \in (-2,1)$
2.	$X = \{x \mid -2 \leq x < 1\}$	X es cerrado a la izquierda y abierto a la derecha.	$x \in [-2,1)$
3.	$X = \{x \mid -2 < x \leq 1\}$	X es abierto a la izquierda y cerrado a la derecha.	$x \in (-2,1]$
4.	$X = \{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$	X es cerrado a ambos lados.	$x \in [-2,1]$

El procedimiento de resolución de una desigualdad es idéntico al de las igualdades; sin embargo, se debe considerar las restricciones que imponen las propiedades del orden y la relación 'menor que'.

EJEMPLO 2.20. Obténgase el intervalo solución de la siguiente desigualdad:

$$\frac{2x-3}{x-1}<\frac{1}{3}$$

Para resolver esta desigualdad se debe tomar en cuenta el valor de $x-1$, el cual puede ser positivo o negativo, según como se tome el valor de x; además, hay que notar que $x\neq 1$.

Caso $x-1>0$.

$$\begin{aligned}
\frac{2x-3}{x-1}&<\frac{1}{3}\\
(x-1)\frac{2x-3}{x-1}&<(x-1)\frac{1}{3}\\
2x-3&<\frac{x-1}{3}\\
(3)(2x-3)&<(3)\frac{x-1}{3}\\
6x-9&<x-1\\
6x-x&<9-1\\
5x<8&\Rightarrow x<\frac{8}{5}
\end{aligned}$$

Se debe considerar entonces que $x<\frac{8}{5}$; además, se hizo la aclaración $x-1>0\Rightarrow x>1$. Por lo tanto, la solución para este caso es la intersección de ambos intervalos; es decir $1<x<\frac{8}{5}$ (véase la figura 2.7).

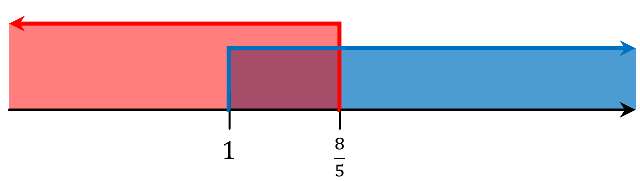

Figura 2.7. Intervalo solución del primer caso para el ejemplo 2.20.

Caso $x-1<0$.

$$\begin{aligned}
\frac{2x-3}{x-1}&<\frac{1}{3}\\
(x-1)\frac{2x-3}{x-1}&>(x-1)\frac{1}{3}\\
2x-3&>\frac{x-1}{3}\\
(3)(2x-3)&>(3)\frac{x-1}{3}\\
6x-9&>x-1\\
6x-x&>9-1
\end{aligned}$$

$$5x > 8 \Rightarrow x > \frac{8}{5}$$

Entonces, se tiene $x > \frac{8}{5}$; además, como $x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$. Por lo tanto, no existe una solución para este caso, ya que no hay intersección de los intervalos.

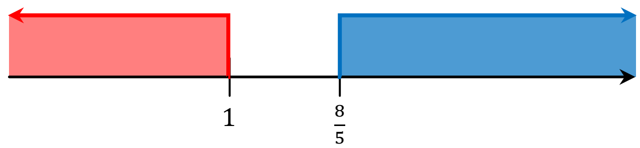

Figura 2.8. Intervalo solución del segundo caso para el ejemplo 2.20.

Finalmente, la solución de la desigualdad es la unión entre sendos conjuntos solución de los casos descritos anteriormente: $1 < x < \frac{8}{5}$ (véase la figura 2.9).

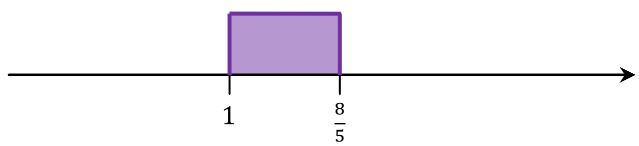

Figura 2.9. Intervalo solución de la desigualdad para el ejemplo 2.20.

EJEMPLO 2.21. Obténgase el intervalo solución de la siguiente desigualdad:

$$\frac{4x+5}{2x+9} > 1$$

Caso $2x + 9 > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{4x+5}{2x+9} &> 1 \\ (2x+9)\frac{4x+5}{2x+9} &> 2x+9 \\ 4x+5 &> 2x+9 \\ 4x-2x &> 9-5 \\ 2x &> 4 \Rightarrow x > 2 \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que $x > 2$; además, la declaración $2x + 9 > 0 \Rightarrow x > -\frac{9}{2}$. Por lo tanto, la solución para este caso es $2 < x$ (véase la figura 2.10).

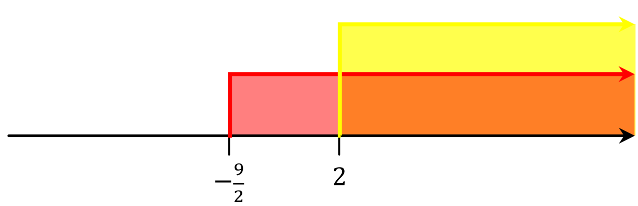

Figura 2.10. Intervalo solución del primer caso para el ejemplo 2.21.

Caso $2x + 9 < 0$.

$$\begin{aligned} \frac{4x+5}{2x+9} &> 1 \\ (2x+9)\frac{4x+5}{2x+9} &< 2x+9 \\ 4x+5 &< 2x+9 \\ 4x-2x &< 9-5 \\ 2x &< 4 \Rightarrow x < 2 \end{aligned}$$

Entonces, se tiene $2 > x$; además, como $2x + 9 < 0 \Rightarrow x < -\frac{9}{2}$. Por lo tanto, la solución para este caso es $x < -\frac{9}{2}$ (véase la figura 2.11).

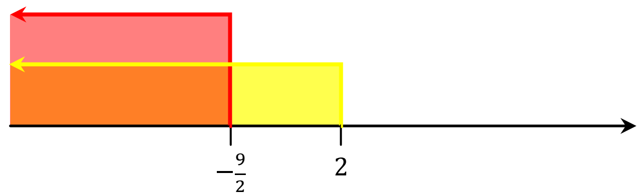

Figura 2.11. Intervalo solución del segundo caso para el ejemplo 2.21.

Finalmente, la solución general de la desigualdad (mostrada en la figura 2.12) es $x < -\frac{9}{2} \cup x > 2$.

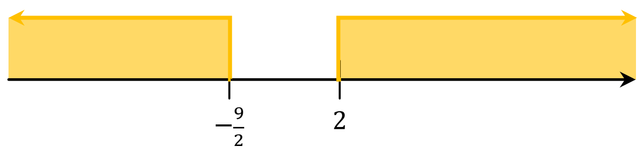

Figura 2.12. Intervalo solución de la desigualdad para el ejemplo 2.21.

EJEMPLO 2.22. Obténgase el intervalo solución de la siguiente desigualdad:

$$\left|\frac{1}{x} + \frac{3}{4x}\right| < \frac{7}{8}$$

Ahora se tiene una desigualdad con valor absoluto; entonces, se aplicará $|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$.

Caso $\frac{1}{x} + \frac{3}{4x} < \frac{7}{8}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{3}{4x} &< \frac{7}{8} \\ \frac{4+3}{4x} &< \frac{7}{8} \\ \frac{7}{4x} &< \frac{7}{8} \end{aligned}$$

Se debe considerar cuando $x > 0$:

$$\frac{7}{4x} < \frac{7}{8}$$
$$\frac{4x}{7}\left(\frac{7}{4x}\right) < \frac{4x}{7}\left(\frac{7}{8}\right)$$
$$1 < \frac{4x}{8}$$
$$8 < 4x \Rightarrow 2 < x$$

Y la solución de esta condición es $x > 2$.

Para cuando $x < 0$

$$\frac{7}{4x} < \frac{7}{8}$$
$$\frac{4x}{7}\left(\frac{7}{4x}\right) > \frac{4x}{7}\left(\frac{7}{8}\right)$$
$$1 > \frac{4x}{8}$$
$$8 > 4x \Rightarrow 2 > x$$

Entonces, la solución de esta condición es $x < 0$. Y la solución para este caso es $x < 0 \cup x > 2$.

Caso $-\frac{7}{8} < \frac{1}{x} + \frac{3}{4x}$.

$$-\frac{7}{8} < \frac{1}{x} + \frac{3}{4x}$$
$$-\frac{7}{8} < \frac{4+3}{4x}$$
$$-\frac{7}{8} < \frac{7}{4x}$$

Para $x > 0$:

$$-\frac{7}{8} < \frac{7}{4x}$$
$$\frac{4x}{7}\left(-\frac{7}{8}\right) < \frac{4x}{7}\left(\frac{7}{4x}\right)$$
$$(-8)\left(-\frac{4x}{8}\right) > -8$$
$$4x > -8 \Rightarrow x > -2$$

Y la solución de esta condición es $x > 0$.

Para cuando $x < 0$

$$-\frac{7}{8} < \frac{7}{4x}$$
$$\frac{4x}{7}\left(-\frac{7}{8}\right) > \frac{4x}{7}\left(\frac{7}{4x}\right)$$

$$(-8)\left(-\frac{4x}{8}\right) < -8$$
$$4x < -8 \Rightarrow x < -2$$

Entonces, la solución para la condición es $x < -2$. La solución de este caso es $x < -2 \cup x > 0$.

Los dos intervalos obtenidos son $x < 0 \cup x > 2$ y $x < -2 \cup x > 0$. Por lo cual, la solución final está dado por la intersección de ambos conjuntos; es decir $x < -2 \cup x > 2$.

Esto implica que la resolución de desigualdades depende de los siguientes factores:

1. Las propiedades de las desigualdades en los números reales.
2. El valor que supuestamente puede o no tomar la incógnita.
3. Las propiedades del valor absoluto, cuando las desigualdades lo incluyan.

Un punto importante es saber cuándo se debe intersecar y cuando unir. De manera general, cuando se tengan dos condiciones que deban cumplirse al mismo tiempo se hará una intersección.