Polinomios

Definición de polinomio y sus propiedades

Un polinomio puede expresarse como una suma de productos de funciones de x por una constante o como una suma de términos algebraicos; es decir

$$a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

Un polinomio en x es una expresión de la forma

$$p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

donde $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in C$.

Las expresiones $a_0x^0, a_1x^1, a_2x^2, a_3x^3, \dots, a_nx^n$ son los términos del polinomio, y los coeficientes están representados por los términos $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Grado de un polinomio e igualdad de polinomios

Grado de un polinomio

Se le conoce como grado de un polinomio a la mayor potencia de x dentro del polinomio, con coeficiente no nulo; es decir, sea el polinomio

$$p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

La mayor potencia de x del polinomio $p(x)$ es n, si $a_n \neq 0$. Por lo tanto, el grado de $p(x)$ es n; o bien,

$$\mathrm{gr}(p) = n$$

EJEMPLO 4.1. Sean los polinomios $p(x) = 2 + x + 3x^2 - x^3$ y $q(x) = 8x - 4x^2 - 2x^3 + 0x^4$

Ambos polinomios tienen grado 3, ya que la mayor potencia de x es el cubo; en el caso de $q(x)$, se tiene que el coeficiente de la potencia cuarta es cero, por lo que el producto en ese término es cero y no se toma en cuenta.

Igualdad de polinomios

Un polinomio puede escribirse en forma compacta de la siguiente manera:

$$p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$$

Sean los polinomios

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k, \qquad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_kx^k$$

Se tiene que $p(x) = q(x)$ si, y sólo si

1. $\text{gr}(p) = \text{gr}(q)$
2. $a_k x^k = b_k x^k, \forall\ k = 0, 1, 2, 3, \dots, \text{gr}(p)$

EJEMPLO 4.2. Sean los polinomios $p(x) = 1 - 3x^2$ y $q(x) = 1 - 0x - 3x^2 + 0x^3 - 0x^4$.

Se tiene que los polinomios son iguales, ya que el grado de ambos es dos ($q(x)$ tiene dos potencias mayores multiplicadas por cero, y por lo tanto son descartadas para evaluar el grado), y los términos de grado cero y grado 2 son iguales (el término en x de $p(x)$ es $0x$, por lo tanto se puede comparar con el segundo término de $q(x)$). Finalmente, eliminando los términos nulos de cada polinomio, se tiene que

$$1 - 3x^2 = 1 - 3x^2 \qquad \Rightarrow \qquad p(x) = q(x)$$

Propiedades: adición, multiplicación de polinomios y multiplicación por un escalar

Adición

Dado que un polinomio es una expresión algebraica, se puede realizar la suma correspondiente entre diferentes polinomios; esto se realiza obedeciendo las leyes de la reducción de términos semejantes en expresiones algebraicas.

Sean los polinomios

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Se tiene que

$$p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

De la definición de polinomio, los coeficientes $a_k, b_k \in C$, en consecuencia se puede aplicar la distribución en los números complejos; esto implica, que la adición en los polinomios queda definida como

$$p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$$

Sean los polinomios $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$, la adición en los polinomios cumple con las siguientes propiedades:

1. Cerradura, $p(x) + q(x)$ es un polinomio de grado igual a
   - ✓ $\text{gr}(p)$ si $\text{gr}(p) > \text{gr}(q)$
   - ✓ $\text{gr}(q)$ si $\text{gr}(p) < \text{gr}(q)$
   - ✓ $\text{gr}(p + q) \leq \text{gr}(p)$ si $\text{gr}(p) = \text{gr}(q)$
2. Asociación, $\text{gr}(p) + [\text{gr}(q) + \text{gr}(r)] = [\text{gr}(p) + \text{gr}(q)] + \text{gr}(r)$.
3. Conmutación, $\text{gr}(p) + \text{gr}(q) = \text{gr}(q) + \text{gr}(p)$.
4. Elemento neutro, $p(x) + O(x) = p(x)$ donde $O(x)$ es el polinomio cero, con grado indefinido.

5. Elemento inverso, $p(x)+[-p(x)]=O(x)$

EJEMPLO 4.3. Sean los polinomios $g(x)=(1+i)x^2+ix-2$ y $h(x)=-ix^3+x+(3-2i)$. La suma de los polinomios será:

$$\begin{aligned} g(x)+h(x) &= [(1+i)x^2+ix-2]+[-ix^3+x+(3-2i)] \\ &= -ix^3+(1+i)x^2+(1+i)x+(1-2i) \end{aligned}$$

Multiplicación

Para la multiplicación de polinomios se realiza el siguiente procedimiento.

Sean los polinomios

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad q(x)=\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Se tiene que

$$p(x)\cdot q(x)=\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right)$$

Como los coeficientes $a_k, b_k \in C$, se puede aplicar la distribución en los números complejos para cada término de $q(x)$:

$$p(x)\cdot q(x)=\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)b_0+\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)b_1x+\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)b_2x^2+\cdots+\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)b_m x^m$$

Haciendo la multiplicación

$$p(x)\cdot q(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k b_0 x^k+\sum_{k=0}^{n} a_k b_1 x^{k+1}+\sum_{k=0}^{n} a_k b_2 x^{k+2}+\cdots+\sum_{k=0}^{n} a_k b_m x^{k+m}$$

Al desarrollar la expresión y reduciendo los términos semejantes se tiene que

$$p(x)\cdot q(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots+a_nb_mx^{m+n}$$

Finalmente, se obtiene que la multiplicación de polinomios se define como:

$$p(x)\cdot q(x)=\sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k \quad \forall \quad c_k=\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Para los polinomios $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$, la multiplicación cumple con las siguientes propiedades:

1. Cerradura, $p(x)\cdot q(x)$ es un polinomio de grado $\mathrm{gr}(p\cdot q)=\mathrm{gr}(p)+\mathrm{gr}(q)$
2. Asociación, $\mathrm{gr}(p)\cdot[\mathrm{gr}(q)\cdot\mathrm{gr}(r)]=[\mathrm{gr}(p)\cdot\mathrm{gr}(q)]\cdot\mathrm{gr}(r)$.
3. Conmutación, $\mathrm{gr}(p)\cdot\mathrm{gr}(q)=\mathrm{gr}(q)\cdot\mathrm{gr}(p)$.

4. Elemento neutro, $p(x) \cdot u(x) = p(x)$ donde $u(x)$ es un polinomio constante, de grado cero.
5. Elemento inverso, $p(x) \cdot \frac{1}{p(x)} = u(x)\ \forall\ p(x) \neq O(x)$ y $u(x) = 1$.

También puede realizarse una distribución con respecto de la suma:

✓ Distribución, $p(x)[q(x) + r(x)] = p(x)q(x) + p(x)r(x)$

EJEMPLO 4.4. Sean los polinomios $a(x) = -ix^2 + x + 1$ y $b(x) = ix + i$. Su multiplicación está dada por

$$
\begin{aligned}
a(x)b(x) &= (-ix^2 + x + 1)(ix + i) \\
&= (-i)(ix + i)x^2 + (1)(ix + i)x + (1)(ix + i) \\
&= (x + 1)x^2 + (ix + i)x + (ix + i) \\
&= x^3 + x^2 + ix^2 + ix + ix + i \\
&= x^3 + (1 + i)x^2 + 2ix + i
\end{aligned}
$$

Multiplicación por un escalar

Los polinomios también pueden multiplicarse por constantes numéricas, que son consideradas como polinomios de grado cero. En este caso, la multiplicación de un polinomio por un escalar se define como:

$$\alpha \cdot p(x) = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha a_k x^k$$

Esto implica que cada término del polinomio se multiplica por el escalar.

EJEMPLO 4.5. Dado el polinomio $r(x) = -3x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1$ y el escalar $\beta = -2$, el producto $\beta \cdot r(x)$ es

$$
\begin{aligned}
z \cdot r(x) &= -2(-3x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1) \\
&= (-2)(-3x^4) + (-2)(2x^3) + (-2)(-x^2) + (-2)(x) + (-2)(1) \\
&= 6x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 2x - 2
\end{aligned}
$$

División de Polinomios

Derivado de la propiedad del elemento inverso en la multiplicación, se puede definir a la división de polinomios como:

$$\frac{a(x)}{b(x)} = a(x) \cdot \frac{1}{b(x)}$$

la cual, es análoga a la división enunciada en el conjunto de los números racionales.

Divisibilidad y algoritmo de la división

Tomando como base el algoritmo de la división de los números enteros, se puede definir el algoritmo de la división de los polinomios. Para ello, hay que definir el concepto de factor de un polinomio.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios en x con coeficientes complejos, y $g(x) \neq 0$. Se considera que $g(x)$ es un factor de $f(x)$ si existe un polinomio $q(x)$ con coeficientes complejos tal que

$$f(x) = g(x)q(x)$$

Por lo tanto, se dice que $f(x)$ es divisible entre $g(x)$.

EJEMPLO 4.6. Si $f(x) = x^2 + 3x + 2$ y $g(x) = x + 1$ se tiene que

$$x^2 + 3x + 2 = q(x)(x + 1)$$

donde $q(x) = x + 2$.

Con base en la definición de factor, se puede obtener el algoritmo de la división de polinomios.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios en x con coeficientes complejos, y $g(x) \neq 0$. Existen dos polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ con coeficientes complejos tales que

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

donde $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$, o bien $r(x) = O(x)$.

EJEMPLO 4.7. Sean los polinomios $f(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 10x + 8$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$, encuéntrese los polinomios cociente y residuo de dividir f entre g.

Para realizar esta operación se puede dibujar el arreglo clásico de la división, donde el dividendo f se encuentra dentro del símbolo de división, y el divisor g se coloca afuera.

Por otra parte, el cociente se escribirá en la parte superior del arreglo, y el residuo en la parte inferior.

$$\begin{array}{r|lllll}
 & x^2 & +6x & +8 & & \\ \cline{2-6}
x^2 - 2x + 1 & x^4 & +4x^3 & -3x^2 & -10x & +8 \\
 & -x^4 & +2x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & +6x^3 & -4x^2 & -10x & \\
 & & -6x^3 & +12x^2 & -6x & \\ \cline{3-5}
 & & & +8x^2 & -16x & +8 \\
 & & & -8x^2 & +16x & -8 \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0
\end{array}$$

En este ejemplo los polinomios son $q(x) = x^2 + 6x + 8$ y $r(x) = 0$. Por lo tanto, el polinomio $f(x)$ es divisible entre el polinomio $g(x)$.

Cabe destacar que como $g(x)$ también es divisible entre polinomios de grado uno (los dos factores que al multiplicarse entre sí dan como resultado al polinomio de grado dos), entonces cada uno de sus factores será en consecuencia un factor del polinomio original $f(x)$.

EJEMPLO 4.8. Divídase el polinomio $f(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ entre el polinomio $g(x) = x^2 + x + 1$.

Para este ejemplo se recurrirá nuevamente al arreglo para realizar la división entre polinomios, considerando que habrá más potencias para trabajar.

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & x^4 & -2x^3 & +2x^2 & -x & & & \\
\hline
x^2+x+1 & x^6 & -x^5 & +x^4 & -x^3 & +x^2 & -x & +1 \\
 & -x^6 & -x^5 & -x^4 & & & & \\
\cline{2-4}
 & & -2x^5 & & -x^3 & & & \\
 & & +2x^5 & +2x^4 & +2x^3 & & & \\
\cline{3-5}
 & & & +2x^4 & +x^3 & +x^2 & & \\
 & & & -2x^4 & -2x^3 & -2x^2 & & \\
\cline{4-6}
 & & & & -x^3 & -x^2 & -x & \\
 & & & & +x^3 & +x^2 & +x & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & & +1
\end{array}
$$

Para este ejemplo, se tiene que la división arroja un residuo diferente de cero.

Teoremas del residuo y del factor

Al ser considerado una función, un polinomio puede evaluarse en cualquier valor constante c que pertenezca a los números complejos; es decir, se puede sustituir la variable x por la constante c:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

$$\Rightarrow \quad \forall\, c \in \mathbb{C}, p(c) = a_0 + a_1(c) + a_2(c)^2 + a_3(c)^3 + \cdots + a_n(c)^n$$

Finalmente se obtiene la constante $p(c)$, que se llama valor del polinomio $p(x)$ en c.

Existe un caso particular dentro de la división de polinomios, que se presenta cuando el divisor es un polinomio de grado uno, con su término lineal de coeficiente unitario, y el término constante negativo; es decir,

$$g(x) = x - c$$

Con base en estos dos conceptos se pueden plantear los teoremas del residuo y del factor.

Teorema del residuo

Sean $p(x)$ un polinomio con coeficientes complejos, y $c \in C$. El residuo de dividir el polinomio $p(x)$ entre $x - c$ es igual a obtener el valor $p(c)$.

EJEMPLO 4.9. Dado el polinomio $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$, obténgase el residuo de dividir $p(x)$ entre $g(x) = x - 1$.

Primer método: división convencional. Primero se realizará la división como se hace normalmente en los polinomios.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & -x & -6 & \\
\hline
x-1 & 2x^3 & -3x^2 & -5x & +1 \\
 & -2x^3 & +2x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & -x^2 & -5x & \\
 & & +x^2 & -x & \\
\cline{3-4}
 & & & -6x & +1 \\
 & & & +6x & -6 \\
\cline{4-5}
 & & & & -5
\end{array}
$$

y el residuo es –5.

Segundo método: teorema del residuo. Para este método, sólo se sustituirá la variable x por 1, y se reducirán las operaciones.

$$\begin{aligned} p(1) &= 2(1)^3 - 3(1)^2 - 5(1) + 1 \\ &= -5 \end{aligned}$$

y se observa que el resultado también es –5.

EJEMPLO 4.10. Dado el polinomio $w(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, ¿cuál es el residuo de dividirlo entre $v(x) = x + i$?

Utilizando el teorema del residuo

$$\begin{aligned} w(-i) &= (-i)^3 - 2(-i)^2 + (-i) - 2 \\ &= i + 2 - i - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que el residuo es cero.

Teorema del factor

Un caso interesante del teorema del residuo es cuando el número $p(c)$ es igual a cero. En este caso se tiene el siguiente teorema.

> Sean $p(x)$ un polinomio con coeficientes complejos, y $c \in C$. El polinomio $p(x)$ es divisible entre $x - c$ si, y sólo si, se tiene que $p(c) = 0$.

El ejemplo 4.10 presenta al polinomio v como factor de w.

EJEMPLO 4.11. Determínese si el polinomio $f(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 10x + 8$ es divisible entre $g(x) = x - 1$.

Para realizar este ejemplo, se tiene que

$$\begin{aligned} f(1) &= (1)^4 + 4(1)^3 - 3(1)^2 - 10(1) + 8 \\ &= 1 + 4 - 3 - 10 + 8 \\ &= 13 - 13 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que $f(x)$ es divisible entre $g(x)$.

EJEMPLO 4.12. ¿El polinomio $n(x) = x - 2$ será factor de $m(x) = ix^3 - 2x^2 + ix - 2i$?

Para comprobarlo, se hará uso del teorema del factor.

$$\begin{aligned} m(2) &= i(2)^3 - 2(2)^2 + i(2) - 2i \\ &= 8i - 8 + 2i - 2i \\ &= -8 + 8i \end{aligned}$$

Como el residuo no es nulo (el resultado de evaluar el polinomio es diferente de cero), entonces $n(x)$ no es factor de $m(x)$.

División sintética

El proceso de división de polinomios tiene particularidades cuando el polinomio divisor tiene la forma $x - c$. El arreglo típico que se utiliza para resolver esta operación es bastante largo, repetitivo, y en ocasiones puede resultar tedioso calcular tantas operaciones.

Sin embargo, existe una forma más simple de realizar la división, sin extender el proceso a más de tres renglones; este arreglo se le conoce como división sintética o la regla de Ruffini, ya que se realiza una división como tal, pero de forma sintetizada, donde se puede colocar el divisor, el dividendo, el cociente y el residuo en dos líneas.

Debe recordarse que los coeficientes nulos no deben ser ignorados, pues están presentes al momento de operar el polinomio con cualquier posible divisor.

El arreglo de la división sintética se obtiene de la siguiente forma:

Tomando los polinomios $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$ y $g(x) = x - 1$, se inicia con el arreglo convencional de la división entre expresiones polinomiales:

$$
\begin{array}{r|llll}
 & 2x^2 & -x & -6 & \\ \cline{2-5}
x-1 & 2x^3 & -3x^2 & -5x & +1 \\
 & -2x^3 & +2x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -x^2 & -5x & \\
 & & +x^2 & -x & \\ \cline{3-4}
 & & & -6x & +1 \\
 & & & +6x & -6 \\ \cline{4-5}
 & & & & -5
\end{array}
$$

Debido a que las potencias de x están en orden decreciente, se puede dejar únicamente los coeficientes de los polinomios, conservando el orden citado; además, se puede dejar el término independiente del divisor, ya que se sabe que siempre tendrá la forma $x - c$.

$$
\begin{array}{r|llll}
 & 2 & -1 & -6 & \\ \cline{2-5}
-1 & 2 & -3 & -5 & +1 \\
 & -2 & +2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -1 & -5 & \\
 & & +1 & -1 & \\ \cline{3-4}
 & & & -6 & +1 \\
 & & & +6 & -6 \\ \cline{4-5}
 & & & & -5
\end{array}
$$

Se pueden omitir los coeficientes resultantes de multiplicar el cociente por el primer término del divisor; además, también se omiten los coeficientes que bajan después de realizar cada resta del proceso de división. Esto permite escribir una sola vez el mismo coeficiente.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -1 & -6 & \\ \cline{2-5}
-1 & 2 & -3 & -5 & +1 \\
 & & +2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -1 & & \\
 & & & -1 & \\ \cline{3-4}
 & & & -6 & \\
 & & & & -6 \\ \cline{4-5}
 & & & & -5
\end{array}$$

Se puede comprimir el arreglo, subiendo las líneas de resta para colocarlas debajo del dividendo.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -1 & -6 & \\ \cline{2-5}
-1 & 2 & -3 & -5 & +1 \\
 & & +2 & -1 & -6 \\ \cline{2-5}
 & & -1 & -6 & -5
\end{array}$$

En la cuarta línea del nuevo arreglo se puede escribir el primer coeficiente del cociente y se tendrán todos los coeficientes del cociente en el último renglón.

$$\begin{array}{r|rrrr}
\cline{2-5}
-1 & 2 & -3 & -5 & +1 \\
 & & +2 & -1 & -6 \\ \cline{2-5}
 & 2 & -1 & -6 & -5
\end{array}$$

Finalmente, se reacomodan las líneas de división y se cambia el signo del coeficiente del divisor para obtener

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 2 & -3 & -5 & +1 \\ \cline{1-1}
 & & +2 & -1 & -6 \\ \cline{2-5}
 & 2 & -1 & -6 & -5
\end{array}$$

El producto del divisor por cada uno de los coeficientes de la tercera línea da como resultado los números de la segunda línea, recorridos un lugar a la derecha. Además, los primeros tres coeficientes de la tercera línea son los coeficientes del cociente; el último corresponde al residuo de la división.

EJEMPLO 4.13. Utilícese la división sintética para dividir $f(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 10x + 8$ entre $g(x) = x + 2$.

Se arreglan los coeficientes de mayor a menor potencia dentro del arreglo, y se toma –2 como el divisor.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-2 & 1 & +4 & -3 & -10 & +8 \\ \cline{1-1}
 & & -2 & -4 & +14 & -8 \\ \cline{2-6}
 & 1 & +2 & -7 & +4 & 0
\end{array}$$

Por lo tanto, se concluye que $f(x)$ es divisible entre $g(x)$; además, el polinomio cociente es un grado menor que el dividendo.

En general, al dividir un polinomio $p(x)$, cuyo grado es $\text{gr}(p) = n$, entre el factor $g(x) = x - c$ (de grado $\text{gr}(g) = 1$), se obtiene que el polinomio cociente $q(x)$ tiene grado $\text{gr}(q) = \text{gr}(p) - \text{gr}(g)$; es decir, $\text{gr}(q) = n - 1$. Este polinomio cociente se conoce como el polinomio degradado de $p(x)$.

EJEMPLO 4.14. Divídase el polinomio $f(\omega) = \omega^4 + 2\omega^2 + 1$ entre el polinomio $g(\omega) = \omega - i$.

El polinomio dividendo tiene omitidos los términos de tercer y primer grado; eso implica que dichos términos tienen coeficientes nulos. Es necesario que se escriban explícitamente dichos coeficientes en la división sintética, ya que su exclusión implicaría el uso de otro polinomio diferente al solicitado.

$$\begin{array}{r|ccccc} i & 1 & +0 & +2 & +0 & +1 \\ & & +i & -1 & +i & -1 \\ \hline & 1 & +i & +1 & +i & 0 \end{array}$$

El residuo es cero, y el cociente es el polinomio degradado $q(x) = x^3 + ix^2 + x + i$.

Raíces de un polinomio

Además de una expresión algebraica, o una función, los polinomios pueden expresarse como otra entidad matemática. Se conoce como ecuación de grado n a una ecuación de la siguiente forma:

$$a_n x^n + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Esto quiere decir que los polinomios también se pueden establecer como ecuaciones; es decir, se pueden igualar a cero. En este caso, se debe obtener los valores de *x* que satisfacen dicha ecuación; es decir, conocer los valores para los cuales el polinomio dado obtiene un valor igual a cero. Dichos valores se llaman raíces del polinomio.

Definición de raíz

Sean $p(x)$ un polinomio con coeficientes complejos, y un valor $\alpha \in C$. Se tiene que α es una raíz de $p(x)$ si, y sólo si, se cumple que $p(\alpha) = 0$.

EJEMPLO 4.15. Sean el polinomio $f(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 10x + 8$, y $\alpha = -2$. Si se valúa el polinomio en -2, se tendrá lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^4 + 4(-2)^3 - 3(-2)^2 - 10(-2) + 8 \\ &= 16 + 4(-8) - 3(4) + 20 + 8 \\ &= 16 - 32 - 12 + 20 + 8 \\ &= 44 - 44 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, -2 es una raíz del polinomio $f(x)$.

EJEMPLO 4.16. Dado el polinomio $p(x) = x^4 - Ax^3 + 6x^2 - 4Ax + 2A$, calcúlese el valor que A que permite a $\alpha = 2i$ ser una raíz de $p(x)$.

Para que el valor dado sea una raíz debe cumplirse que $p(2i) = 0$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= (2i)^4 - A(2i)^3 + 6(2i)^2 - 4A(2i) + 2A \\ &= 16 + 8Ai - 24 - 8Ai + 2A \\ &= -8 + 2A \end{aligned}$$

Por lo que al despejar A en la ecuación se llega a $A = 4$, que es el valor buscado. El polinomio con todos sus coeficientes es $p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 16x + 8$.

Teorema fundamental del Álgebra

Como se ha visto en algunos de los ejemplos anteriores, los polinomios con coeficientes reales no necesariamente tienen raíces reales, sino complejas. Esto puede inducir a pensar que un polinomio de coeficientes complejos puede tener raíces fuera del conjunto de los números complejos. Sin embargo, se puede llegar a la conclusión de que el complejo numérico máximo es $\mathbb{C}$; esta conclusión se obtiene al aplicar el teorema fundamental del Álgebra, el cual expone lo siguiente:

> Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos y de grado mayor o igual a uno, entonces $p(x)$ tiene, al menos, una raíz $\alpha \in C$.

Número de raíces de un polinomio

Sea el polinomio

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Cuyos coeficientes son complejos y su grado es $\mathrm{gr}(p) = n$. Esto quiere decir, que el polinomio $p(x)$ tiene al menos una raíz que pertenece a los complejos. Gracias al teorema del factor, se puede reescribir el polinomio $p(x)$ en términos de un cociente y un divisor:

$$p(x) = (x - \alpha_1) q_1(x) \quad \ldots (1)$$

Se introduce un nuevo polinomio $q_1(x)$ con coeficientes complejos y $\mathrm{gr}(q_1) = \mathrm{gr}(p) - 1$. Nuevamente, por el teorema fundamental del Álgebra y el teorema del factor, se pude reescribir el polinomio $q_1(x)$ como:

$$q_1(x) = (x - \alpha_2) q_2(x) \quad \ldots (2)$$

Con $q_2(x)$ siendo un polinomio con coeficientes complejos y $\mathrm{gr}(q_2) = \mathrm{gr}(p) - 2$. Al repetir esta simplificación de polinomios hasta obtener un polinomio de grado cero, se tendría el siguiente resultado:

$$q_{n-1}(x) = (x - \alpha_n) q_n \quad \ldots (n)$$

donde q_n es un número complejo. Ahora, se puede sustituir la ecuación (n) en (n – 1), ésta a su vez en (n – 2), y así sucesivamente hasta sustituir (2) en (1); y el polinomio $p(x)$ quedará representado como un producto de polinomios de grado uno:

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n) q_n$$

Finalmente, q_n es el coeficiente del término x^n del polinomio original $p(x)$. Esta descomposición en factores lineales es única, y muestran cada una de las raíces del polinomio $p(x)$. Esto indica que el número de factores lineales en los cuales se puede descomponer un polinomio, es igual al número de raíces de dicho polinomio.

> Si $p(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos; entonces, $p(x)$ tiene n raíces.

El que un polinomio $p(x)$ tenga n raíces no implica que dichas raíces sean diferentes entre sí; cuando un polinomio tiene una raíz α repetida, se dice que α es una raíz múltiple de $p(x)$. Esta propiedad es conocida como multiplicidad de α.

EJEMPLO 4.17. Sea $p(x) = -x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 4x + 12$. Para descomponer el polinomio en sus factores lineales se realizará la división sintética consecutivamente con las raíces $-3, -2, 1$.

Para $\alpha_1 = -3$:

$$\begin{array}{rrrrr|l} -1 & -6 & -9 & 4 & 12 & -3 \\ & +3 & +9 & 0 & -12 & \\ \hline -1 & -3 & 0 & 4 & 0 & \end{array}$$

Por lo que se tiene que $p(x) = (x+3)(-x^3 - 3x^2 + 4)$.

Para $\alpha_2 = -2$:

$$\begin{array}{rrrr|l} -1 & -3 & 0 & 4 & -2 \\ & +2 & +2 & -4 & \\ \hline -1 & -1 & +2 & 0 & \end{array}$$

Y ahora se obtiene $p(x) = (x+3)(x+2)(-x^2 - x + 2)$.

Para $\alpha_3 = 1$:

$$\begin{array}{rrr|l} -1 & -1 & +2 & 1 \\ & -1 & -2 & \\ \hline -1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Entonces se tiene que $p(x) = (x+3)(x+2)(x-1)(-x-2)$.

Finalmente, el último factor puede reducirse como $-x - 2 = (-1)(x+2)$. Y el polinomio original puede expresarse como $p(x) = (x+3)(x+2)(x-1)(x+2)(-1)$, donde se observa que la raíz $\alpha_2 = -2$ se repite una vez; por lo tanto, $\alpha_2 = -2$ es una raíz múltiple, de multiplicidad dos.

Cabe destacar que un polinomio se puede expresar como una serie de productos, que es idéntica a la representación de suma:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)$$

Técnicas elementales para buscar raíces

El mayor interés de los polinomios es conocer cada uno de los factores lineales en los cuales se pueden descomponer; es decir, conocer cada una de las raíces del polinomio. Esta es una tarea bastante interesante, y que muestra diferentes facetas, dependiendo del polinomio que se esté estudiando, de la naturaleza de sus coeficientes, y también de sus raíces. Estas características impiden la generación de un método general que se pueda aplicar a cualquier polinomio, independientemente de su naturaleza o comportamiento.

Sin embargo, si existen diversas técnicas específicas que ayudan a obtener raíces de manera simple; dichos procedimientos se basan en la información proporcionada por el polinomio. Es necesario recalcar que cada técnica puede o no encontrar, por sí sola, todas las raíces de un polinomio. Por ello es mejor utilizar combinaciones de técnicas para maximizar las probabilidades de obtener las raíces de un polinomio.

En general, las técnicas se basan en el tipo de raíces que se pueden obtener; las raíces de un polinomio pueden ser:

- ✓ Reales
    - Racionales
    - Irracionales
- ✓ Complejas

Cada método puede encontrar un tipo de raíces, e inclusive más de uno, pero no todos a la vez.

Posibles raíces racionales

Estas son las raíces más sencillas de localizar, ya que se localizan por medio de factorización directa o por medio de los valores que tienen los coeficientes del polinomio. Para ello se tiene el siguiente teorema:

Sea

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Un polinomio con coeficientes enteros, de grado $n \geq 1$, y $a_0 \neq 0$. Si un número racional en su mínima expresión $\frac{p}{q}$ es raíz de $f(x)$, entonces p es factor de a_0 y q es factor de a_n.

Si $\alpha = \frac{p}{q}$, se tiene que

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$$

Entonces, al sustituir la raíz en el polinomio se tiene

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \cdots + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$
$$a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2}\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \cdots + a_2\frac{p^2}{q^2} + a_1\frac{p}{q} + a_0 =$$

Al multiplicar la ecuación por q^n se tiene

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \cdots + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Debido a que $a_0, p \neq 0$, entonces se puede dividir entre p la ecuación

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + \cdots + a_2 p q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + \frac{a_0 q^n}{p} = 0$$
$$a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + \cdots + a_2 p q^{n-2} + a_1 q^{n-1} = -\frac{a_0 q^n}{p}$$

La parte izquierda es una suma de productos de números enteros, entonces el cociente que se obtiene del lado derecho también es un número entero; esto es posible si, y sólo si, p es factor de a_0.

EJEMPLO 4.18. Sea el polinomio $p(\mu)=\mu^4-\frac{9}{2}\mu^3+\frac{6}{2}\mu^2+\frac{11}{2}\mu-3$, obténgase todas sus raíces reales racionales.

Debido a que el polinomio no tiene coeficientes enteros, no se puede aplicar el método de las posibles raíces racionales; por lo tanto, se lo multiplicará por dos para trabajarlo.

$$q(\mu)=2\mu^4-9\mu^3+6\mu^2+11\mu-6$$

Ahora, se tiene que los factores de los coeficientes a_0 y a_n son:

$a_0=-6$, tiene como factores a $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$.

$a_n=2$, tiene como factores a $\pm1,\pm2$.

Por lo que las posibles raíces racionales del polinomio $q(\mu)$ son:

$$\frac{a_0}{a_n}=\frac{\pm1}{\pm1},\frac{\pm1}{\pm2},\frac{\pm2}{\pm1},\frac{\pm2}{\pm2},\frac{\pm3}{\pm1},\frac{\pm3}{\pm2},\frac{\pm6}{\pm1},\frac{\pm6}{\pm2}\quad\Rightarrow\quad\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}$$

Se dice que son posibles porque pueden o no ser raíces del polinomio.

Ahora, por medio del teorema del factor, se procede a buscar las raíces:

Para $\alpha=1$:

$$\begin{aligned}q(1)&=2(1)^4-9(1)^3+6(1)^2+11(1)-6\\&=2-9+6+11-6\\&=19-15\Rightarrow 4\end{aligned}$$

1 no es raíz del polinomio.

Para $\alpha=-1$:

$$\begin{aligned}q(-1)&=2(-1)^4-9(-1)^3+6(-1)^2+11(-1)-6\\&=2+9+6-11-6\\&=17-17\Rightarrow 0\end{aligned}$$

La primera raíz del polinomio es $\alpha_1=-1$.

Para $\alpha=2$:

$$\begin{aligned}q(2)&=2(2)^4-9(2)^3+6(2)^2+11(2)-6\\&=2(16)-9(8)+6(4)+22-6\\&=32-72+24+22-6\\&=78-78\Rightarrow 0\end{aligned}$$

Para degradar al polinomio es necesario que se aplique la división sintética para las primeras raíces encontradas, pues el polinomio resultante será de grado dos. Una vez degradado, será fácil encontrar el resto de las raíces mediante factorización o ecuación general de segundo grado.

$$\begin{array}{ccccc|l} 2 & -9 & +6 & +11 & -6 & \underline{-1} \\ & -2 & +11 & -17 & +6 & \\ \hline 2 & -11 & +17 & -6 & 0 & \end{array}$$

donde $q(x) = (x+1)(2x^3 - 11x^2 + 17x - 6)$.

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & -11 & +17 & -6 & \underline{2\ \ } \\ & +4 & -14 & +6 & \\ \hline 2 & -7 & +3 & 0 & \end{array}$$

Ahora $q(x) = (x+1)(x-2)(2x^2 - 7x + 3)$. Entonces, el último polinomio degradado se resuelve mediante la ecuación general de segundo grado:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} \\ &= \frac{7 \pm 5}{4} \\ &= 3, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las raíces del polinomio son $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 4.19. Obténgase todas las raíces del polinomio $g(x) = x^4 - 2x^2 - 3x - 2$.

Los factores de los coeficientes a_0 y a_n son:

$a_0 = -2$, tiene como factores a $\pm 1, \pm 2$.

$a_n = 1$, tiene como factores a ± 1.

Las posibles raíces racionales del polinomio son:

$$\frac{a_0}{a_n} = \frac{\pm 1}{\pm 1}, \frac{\pm 2}{\pm 1} \quad \Rightarrow \quad \pm 1, \pm 2$$

Al realizar la división sintética con –1:

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & +0 & -2 & -3 & -2 & \underline{-1} \\ & -1 & +1 & +1 & +2 & \\ \hline 1 & -1 & -1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Ya se tiene un polinomio degradado.

Ahora, al realizar la división con 2:

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & -1 & -1 & -2 & \underline{2} \\
 & +2 & +2 & +2 & \\
\hline
1 & +1 & +1 & 0 &
\end{array}
$$

El polinomio degradado resultante es $g_2(x) = x^2 + x + 1$, cuyas raíces son complejas. Las raíces del polinomio son $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$ y $\alpha_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Para este caso, las posibles raíces racionales no dan información sobre las raíces complejas, ni el número exacto de raíces positivas o negativas.

Regla de los signos de Descartes

Existe la posibilidad de que un polinomio tenga raíces nulas; es decir, que las raíces son iguales a cero. Este tipo de raíces se presentan cuando el término $a_0 = 0$. En este caso, la multiplicidad de dichas raíces es igual a la menor potencia del polinomio.

EJEMPLO 4.20. Dado el polinomio $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^3$, se deben encontrar las raíces nulas. El proceso es sencillo, ya que todos los términos tienen a x^3 como factor:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^6 - 2x^5 + x^3 \\
&= x^3(x^3 - 2x^2 + 1)
\end{aligned}
$$

y el polinomio puede expresarse como:

$$f(x) = (x - 0)(x - 0)(x - 0)(x^3 - 2x^2 + 1)$$

Por lo que 0, es una raíz de multiplicidad tres en el polinomio.

Es posible saber cuántas raíces reales positivas y reales negativas tiene un polinomio sin raíces nulas; esto puede saberse analizando los signos de los coeficientes del polinomio. El procedimiento se conoce como regla de los signos de Descartes.

Sea

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Un polinomio de coeficientes reales y $a_0 \neq 0$. Se pueden obtener el número de raíces reales de la siguiente manera:

1. El número de raíces reales positivas de $p(x)$ es igual, o menor de dos en dos, al número de cambios de signo en los coeficientes de $p(x)$.
2. El número de raíces reales negativas de $p(x)$ es igual, o menor de dos en dos, al número de cambios de signo en los coeficientes de $p(-x)$.

EJEMPLO 4.21. Sea el polinomio $g(w) = w^5 - w^4 + 3w^3 + 2w^2 - w + 1$. Obténgase el número de posibles raíces reales positivas y negativas.

Raíces reales positivas: $g(w) = +w^5 - w^4 + 3w^3 + 2w^2 - w + 1$

Raíces reales negativas: $g(-w) = -w^5 - w^4 - 3w^3 + 2w^2 + w + 1$

Por lo tanto, se tiene que el número de posibles raíces reales positivas es 4, 2 ó 0; el número de posibles raíces reales negativas es 1.

Finalmente, es posible construir una tabla con las posibles combinaciones de las raíces del polinomio; en dicha tabla debe considerarse el grado del polinomio (número total de raíces), así como las raíces nulas descubiertas antes de aplicar el teorema de Descartes. El condensado de esta información se muestra en la tabla 4.1.

	1ª opción	2ª opción	3ª opción
$\mathbb{R}^+$	4	2	0
$\mathbb{R}^-$	1	1	1
$\mathbb{C}$	0	2	4
Nulas	0	0	0
Total	5	5	5

Tabla 4.1. Naturaleza de las raíces del polinomio del ejemplo 4.21.

Es adecuado construir este tipo de tablas para establecer el número de raíces de algún tipo específico que pueden obtenerse en un polinomio dado, y así, no buscar más raíces de las que se puede encontrar.

EJEMPLO 4.22. Obténgase información sobre la naturaleza de las raíces del polinomio

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 - 7\lambda - 6$$

Al tomar $p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 - 7\lambda - 6$, el número de cambios de signo es 1; por lo tanto, sólo existe una raíz real positiva. Con $p(-\lambda) = -2\lambda^3 + \lambda^2 + 7\lambda - 6$, existen 2 cambios de signo; entonces, existen 2 ó 0 raíces reales negativas. La tabla 4.2 condensa la información hallada.

	1ª opción	2ª opción
$\mathbb{R}^+$	1	1
$\mathbb{R}^-$	2	0
$\mathbb{C}$	0	2
Nulas	0	0
Total	3	3

Tabla 4.2. Naturaleza de las raíces del polinomio del ejemplo 4.22.

Teoremas sobre raíces irracionales conjugadas y complejas conjugadas

Raíces irracionales

Estas raíces siempre vienen en pares, siempre y cuando el polinomio tenga coeficientes racionales. Sin embargo, es necesario saber que existen estas raíces y que pueden obtenerse en forma exacta, aunque en la práctica de la Ingeniería es más conveniente obtener aproximaciones de estas raíces. Dichas aproximaciones pueden obtenerse por medio de métodos y algoritmos numéricos.

Algunos de los teoremas de para obtener raíces irracionales son:

- ✓ Gráfica de un polinomio.
- ✓ Cambios de signo en un intervalo.

✓ Cotas de las raíces reales.

La gráfica de un polinomio es una curva suave y continua que puede ser construida por medio de evaluaciones del polinomio en puntos dados; de esta curva se puede obtener información de las raíces de un polinomio. Debido a que las raíces reales son números tales que hacen cero a su polinomio, se observa que dichas raíces son los puntos en los cuales la gráfica del polinomio corta al eje de las abscisas.

EJEMPLO 4.23. Sea el polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$. Al valuar al polinomio en puntos específicos del plano XY se tiene la tabla 4.3.

x	$p(x)$	x	$p(x)$
−5	−150	1	0
−4	−75	2	−3
−3	−28	3	2
−2	−3	4	21
−1	6	5	60
0	5		

Tabla 4.3. Valores de la gráfica del polinomio del ejemplo 4.23.

Al localizar cada una de las parejas ordenadas en el plano cartesiano se tiene que la gráfica del polinomio presenta la forma característica plasmada en la figura 4.1.

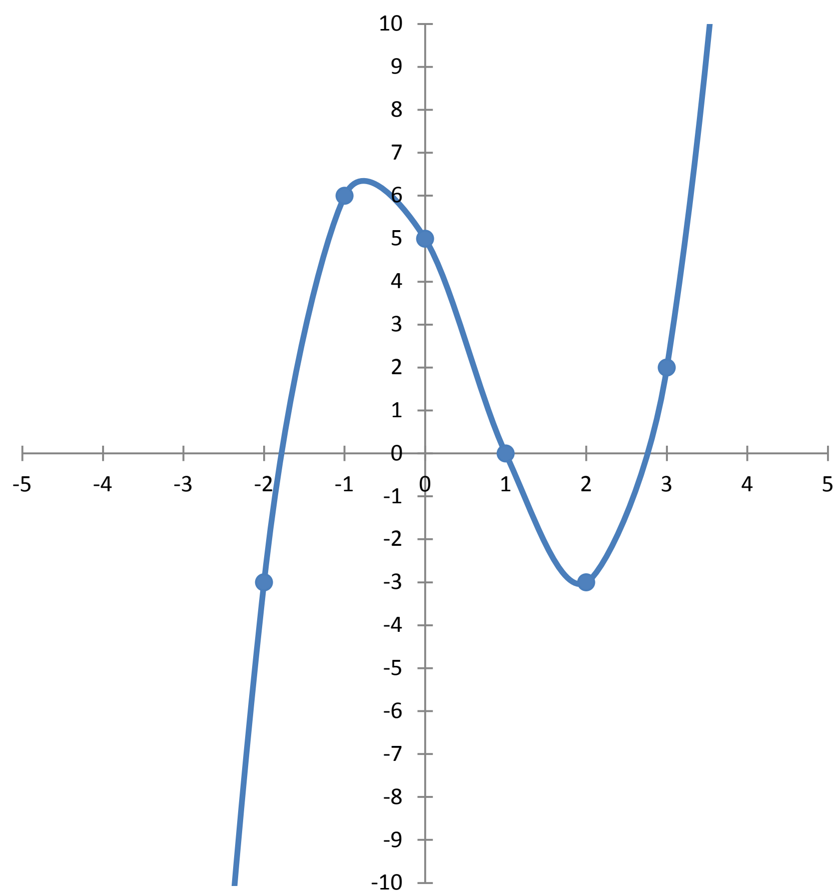

Figura 4.1. Gráfica del polinomio del ejemplo 4.23.

Al localizar los puntos se observa que uno de los cruces es en $x = 1$, en tanto que los otros cruces se presentan en los intervalos $1 < x < 3$ y $-3 < x < -1$; por lo que en esos dos puntos se encuentran las otras dos raíces reales.

Al establecer intervalos por medio de la observación de la gráfica de un polinomio se obtienen los siguientes teoremas:

Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Si a y b son dos números reales tales que $a < b$, y $p(a)$, $p(b)$ tienen signos contrarios, entonces $p(x)$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $a < x < b$.

En el ejemplo anterior, se tienen cambios de signo entre $p(-2) = -3$ y $p(-1) = 6$ y entre $p(2) = -3$ y $p(3) = 2$; por lo tanto, se deduce que las raíces están en los intervalos $\alpha_2 \in (-2, -1)$ y $\alpha_3 \in (2,3)$.

Para localizar las posibles raíces irracionales de un polinomio de manera más precisa se puede recurrir al concepto de cota, el cual se estudio en el tema de números reales. En este caso, si se observa a las raíces de un polinomio como un conjunto que pertenece a los reales, y que está acotado superior e inferiormente, se puede establecer lo siguiente.

Sea

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

un polinomio con coeficientes reales, raíces reales y $a_n > 0$.

1. Si al dividir $p(x)$ entre el polinomio $x - s$ no existen números negativos en el tercer renglón de la división sintética, entonces todas las raíces reales de $p(x)$ son menores que s; es decir, s es una cota superior de las raíces de $p(x)$.
2. Si al dividir $p(x)$ entre el polinomio $x - t$ existen números positivos y negativos alternados en el tercer renglón de la división sintética, entonces todas las raíces reales de $p(x)$ son mayores que t; es decir, t es una cota inferior de las raíces de $p(x)$.

EJEMPLO 4.24. Encuéntrese las cotas de las raíces reales del polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$.

Si se toman los valores –2 y 4, y se realiza la división sintética se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -2 & -4 & +5 & -2 \\ & -2 & +8 & -8 & \\ \hline 1 & -4 & +4 & -3 & \end{array}$$

Los signos alternados en el tercer renglón de la división indican, que –2 es una cota inferior.

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -2 & -4 & +5 & 4 \\ & +4 & +8 & +16 & \\ \hline 1 & +2 & +4 & +21 & \end{array}$$

Al tener sólo números positivos en el tercer renglón de la división se ha encontrado, que 4 es una cota superior.

Por lo tanto, todas las raíces reales del polinomio están entre –2 y 4.

Raíces complejas

Las raíces de un polinomio pueden ser conjugadas, tal es el caso del polinomio $f(x) = x^2 + 1$, donde las raíces son $\alpha_1 = i, \alpha_2 = -i$. En este ejemplo se observa que el polinomio de coeficientes reales tiene raíces complejas, que además son conjugadas.

> Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Si $\alpha = a + bi$ es una raíz de $p(x)$, entonces $\bar{\alpha} = a - bi$ también es una raíz de $p(x)$.

Sea

$$0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Si $\alpha = a + bi$ es una raíz de $p(x)$, entonces

$$0 = a_n(\alpha)^n + a_{n-1}(\alpha)^{n-1} + a_{n-2}(\alpha)^{n-2} + \cdots + a_2(\alpha)^2 + a_1(\alpha) + a_0$$

Si se obtiene el conjugado de la expresión se tendría que

$$\overline{0} = \overline{a_n(\alpha)^n + a_{n-1}(\alpha)^{n-1} + a_{n-2}(\alpha)^{n-2} + \cdots + a_2(\alpha)^2 + a_1(\alpha) + a_0}$$

Por la propiedades del conjugado en los números complejos se tiene que

$$\overline{0} = \overline{a_n}(\bar{\alpha})^n + \overline{a_{n-1}}(\bar{\alpha})^{n-1} + \overline{a_{n-2}}(\bar{\alpha})^{n-2} + \cdots + \overline{a_2}(\bar{\alpha})^2 + \overline{a_1}(\bar{\alpha}) + \overline{a_0}$$

Como los coeficientes del polinomio y el cero son números reales entonces se llega a

$$0 = a_n(\bar{\alpha})^n + a_{n-1}(\bar{\alpha})^{n-1} + a_{n-2}(\bar{\alpha})^{n-2} + \cdots + a_2(\bar{\alpha})^2 + a_1(\bar{\alpha}) + a_0$$

y por lo tanto, se tiene que los números $\alpha_1 = a + bi, \alpha_2 = a - bi$ son raíces del polinomio.

EJEMPLO 4.25. Sea el polinomio $r(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 6$, encuéntrese todas las raíces del polinomio.

Primero se obtendrá el número de posibles raíces reales, y establecer la cantidad de raíces complejas que puede arrojar el polinomio.

PR$\mathbb{R}^+$: $r(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 6$ y se tienen 3 cambios de signo, con 3 o 1 raíces reales positivas.

PR$\mathbb{R}^-$: $r(-x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ y se tiene 1 cambio de signo, con 1 raíz real negativa.

Las posibles combinaciones de raíces se muestran en la tabla 4.4.

	1ª opción	*2ª opción*
$\mathbb{R}^+$	3	1
$\mathbb{R}^-$	1	1
$\mathbb{C}$	0	2
Total	4	4

Tabla 4.4. Número de posibles raíces del polinomio del ejemplo 4.25.

Primero se deben obtener las posibles raíces racionales, las cuales, al analizar los coeficientes son $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.

Al realizar la división sintética para las posibles raíces:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -4 & +3 & +2 & -6 & \underline{1} \\ & +1 & -3 & 0 & +2 & \\ \hline 1 & -3 & 0 & +2 & -4 & \end{array}$$

Para la siguiente posible raíz:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -4 & +3 & +2 & -6 & \underline{-1} \\ & -1 & +5 & -8 & +6 & \\ \hline 1 & -5 & +8 & -6 & 0 & \end{array}$$

La primera raíz racional es –1, lo cual indica que si existe una raíz negativa, y que esta es la única con el signo menos; y se tiene que $r(x) = (x+1)(x^3 - 5x^2 + 8x - 6)$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -5 & +8 & -6 & \underline{2} \\ & +2 & -6 & +4 & \\ \hline 1 & -3 & +2 & -2 & \end{array}$$

Para el polinomio degradado del paso anterior se observa, que al dividir entre $x - 2$, el tercer renglón de la división sintética tiene signos alternados; por lo tanto, 2 es una cota inferior de las raíces del polinomio degradado. La siguiente posible raíz racional debe ser mayor a 2:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -5 & +8 & -6 & \underline{3} \\ & 3 & -6 & +6 & \\ \hline 1 & -2 & +2 & 0 & \end{array}$$

La segunda raíz racional es 3, y se tiene que $r(x) = (x+1)(x-3)(x^2 - 2x + 2)$.

El polinomio de segundo grado se puede descomponer por medio de la ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \end{aligned}$$

Lo cual arroja como resultado los números $\alpha_{3,4} = 1 \pm i$. Entonces, se observa que existen dos raíces complejas, las cuales son conjugadas. Finalmente, todas las raíces del polinomio son $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1 + i, \alpha_4 = 1 - i$.

EJEMPLO 4.26. Obténgase todas las raíces del polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^8 + \lambda^7 - 3\lambda^6 - \lambda^5 - 2\lambda^3 + 4\lambda^2$$

si se sabe que $\alpha_1 = i$.

Del polinomio se sabe que existen dos raíces nulas, por lo que el polinomio degradado es

$$p_1(\lambda) = \lambda^6 + \lambda^5 - 3\lambda^4 - \lambda^3 - 2\lambda + 4$$

Por la regla de los signos de Descartes se observa que:

PR$\mathbb{R}^+$: El número de cambios de signo es 2; por lo tanto, $p_1(\lambda)$ tiene 2 ó 0 raíces reales positivas.

PR$\mathbb{R}^-$: El número de cambios de signo de $p_1(-\lambda)$ es 2; por lo tanto, $p_1(\lambda)$ tiene 2 ó 0 raíces reales negativas.

Con esta información se construye la tabla 4.5, que indica la naturaleza de las raíces de $p(\lambda)$.

	1ª opción	2ª opción	3ª opción	4ª opción
$\mathbb{R}^+$	2	0	2	0
$\mathbb{R}^-$	2	2	0	0
$\mathbb{C}$	2	4	4	6
Nulas	2	2	2	2
Total	8	8	8	8

Tabla 4.5. Naturaleza de las raíces del polinomio del ejemplo 4.26.

Como se indica que $\alpha_1 = i$ es una raíz, y los coeficientes del polinomio son reales, entonces el conjugado es raíz.

Al aplicar la división sintética con $\alpha_3 = i$, el polinomio degradado obtenido es

$$p_2(\lambda) = \lambda^5 + (1+i)\lambda^4 + (-4+i)\lambda^3 + (-2-4i)\lambda^2 + (4-2i)\lambda + 4i$$

Con la segunda raíz $\alpha_4 = -i$, se llega a

$$p_3(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 4$$

Con este nuevo polinomio, se analizan sus posibles raíces racionales; los resultados son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Primero se encontrará una cota superior y una cota inferior.

Tomando como primer valor a –4, la división sintética, en un primer intento para buscar cotas, queda como

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & +1 & -4 & -2 & +4 & \underline{-4} \\ & -4 & +12 & -32 & +136 & \\ \hline 1 & -3 & +8 & -34 & 140 & \end{array}$$

Los signos alternados en el tercer renglón de la división sintética indican, que –4 es una cota inferior. Para la cota superior se verificará el valor de 2.

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & +1 & -4 & -2 & +4 & \underline{2} \\ & +2 & +6 & +4 & +4 & \\ \hline 1 & +3 & +2 & +2 & +8 & \end{array}$$

Los elementos positivos del cociente y residuo de la división demuestran, que 2 es una cota superior.

Utilizando el valor de –2:

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & +1 & -4 & -2 & +4 & \underline{-2} \\ & -2 & +2 & +4 & -4 & \\ \hline 1 & -1 & -2 & +2 & 0 & \end{array}$$

La tercera raíz es $\alpha_5 = -2$. Ahora se evalúa el valor de 1:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -1 & -2 & +2 & \underline{1} \\ & +1 & +0 & -2 & \\ \hline 1 & +0 & -2 & 0 & \end{array}$$

La siguiente raíz es $\alpha_6 = 1$. El polinomio degradado resultante puede trabajarse directamente con un despeje

$$\lambda^2 - 2 = 0$$
$$\lambda^2 = 2$$
$$\lambda = \pm\sqrt{2}$$

Concluyendo el ejemplo, las raíces del polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^8 + \lambda^7 - 3\lambda^6 - \lambda^5 - 2\lambda^3 + 4\lambda^2$$

son $\alpha_{1,2} = 0, \alpha_{3,4} = \pm i, \alpha_5 = -2, \alpha_6 = 1, \alpha_{7,8} = \pm\sqrt{2}$, con lo cual, del análisis por la regla de los signos de Descartes, la opción 1 es la correcta.