Sistemas de Ecuaciones Lineales

El sistema de ecuaciones lineales como modelo matemático de problemas

Los sistemas de ecuaciones lineales permiten el planteamiento de problemas y soluciones que toman en cuenta varias condiciones a la vez, y que pueden presentarse en diversos aspectos de la vida del ser humano.

Las ecuaciones lineales y los sistemas formados a partir de ellas establecen una herramienta básica en el modelado de problemas de Ingeniería.

EJEMPLO 5.1. Si se tiene al circuito eléctrico de la figura 5.1.

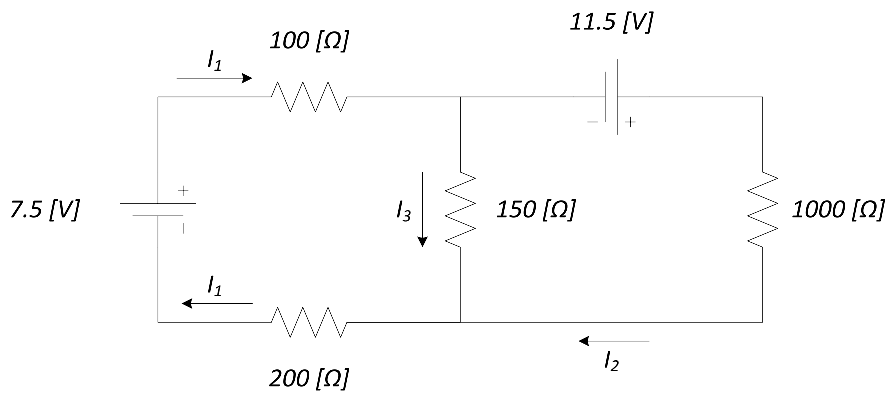

Figura 5.1. Circuito eléctrico cuyo modelo matemático es un sistema de ecuaciones lineales.

Se pueden utilizar las leyes de Kirchhoff para establecer un sistema de ecuaciones lineales y encontrar el valor de las corrientes dentro de cada rama del circuito. Dicho sistema se establecería así:

$$\begin{array}{cccccc} 300I_1 & & +150I_3 & = & 7.5 \\ & 1000I_2 & -150I_3 & = & 11.5 \\ I_1 & -I_2 & -I_3 & = & 0 \end{array}$$

Su solución estaría representada por la terna ordenada $(I_1, I_2, I_3) = (0.02, 0.01, 0.01)$ [A].

EJEMPLO 5.2. Una persona tiene $1,000 y desea comprar cuatro divisas diferentes: dólares (US$) en $12.90, dólares canadienses (C$) en $10.70, euros (€) en $16.50, y libras esterlinas (£) en $22.50. ¿Qué cantidad de cada moneda puede comprar con el dinero disponible?

El planteamiento del problema es sencillo, ya que sólo se tendría una ecuación, pero con cuatro incógnitas. Si US$ $= W$, C$ $= X$, € $= Y$ y £ $= Z$, la ecuación presenta la siguiente forma:

$$12.90W + 10.70X + 16.50Y + 22.50Z = 1000$$

la cual es una ecuación lineal con varias soluciones.

Definición de ecuación lineal y de su solución

Una ecuación lineal es aquélla en la cual todos los productos entre las variables dan como resultado un exponente unitario; es decir, no hay términos en los cuales las variables se multipliquen entre sí, o se eleven a una potencia diferente de una.

Una ecuación lineal sobre el conjunto de los números complejos se define como

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde las constantes $a_i, b \in \mathbb{C}$, los símbolos x_i son las incógnitas, las constantes a_i son los coeficientes de la ecuación, y el número b es el término independiente.

La ecuación lineal puede definir una solución que la resuelva. Como se observará más adelante dicha solución no es única, o incluso, puede ser inexistente.

La solución de la ecuación lineal

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

es un conjunto ordenado de valores k_i tales que

$$a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \cdots + a_nk_n = b$$

Para la solución de una ecuación lineal pueden existir tres casos importantes, los cuales podrán construir una clasificación que más adelante se estudiará. Dichas opciones son las siguientes:

1. La ecuación lineal tiene, al menos, un coeficiente diferente de cero ($a_i \neq 0$). En este caso la ecuación puede reescribirse, despejando la variable del coeficiente no nulo.

$$x_i = \frac{1}{a_i}(b - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 - \cdots - a_nx_n)$$

   En este caso, las variables del lado derecho de la ecuación pueden tener un valor arbitrario.

2. Los coeficientes y el término independiente de la ecuación son nulos. La ecuación tendrá la forma:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n = 0$$

   Ahora, cualquier conjunto solución es una solución de la ecuación.

3. Los coeficientes de la ecuación son nulos, y el término independiente no lo es ($b \neq 0$). La ecuación se escribiría como:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n = b$$

   Al obtener una factorización se tiene que

$$0(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) = b$$

Como el producto de la izquierda da como resultado cero, y el término de la derecha no es cero, entonces se tiene una inconsistencia dentro de la ecuación; por lo tanto, no existe solución alguna que satisfaga a la ecuación.

EJEMPLO 5.3. Del ejemplo 5.2, se puede obtener una infinidad de soluciones, todas válidas y diferentes entre sí. Si de la ecuación

$$12.90W + 10.70X + 16.50Y + 22.50Z = 1000$$

Se despeja la variable W, se tiene que:

$$W = \frac{1}{12.90}(1000 - 10.70X - 16.50Y - 22.50Z)$$

Se podría dar valores a las demás variables y tener una posible solución; si se desea comprar C$10, €30 y £10, se tiene que sólo se podrían comprar US$13.41; es decir,

$$(W, X, Y, Z) = (\text{US\$ } 13.41, \text{C\$ } 10.00, \text{€ } 30.00, \text{£ } 10.00)$$

Es una posible solución de la ecuación. Cabe destacar que esta ecuación sólo puede establecer soluciones con números positivos o ceros, ya que el problema indica compra y no venta de divisas.

Definición de sistema de ecuaciones lineales y de su solución

El planteamiento de una sola ecuación lineal implica el uso de una sola situación con varias cantidades desconocidas; su solución siempre dependerá del número de incógnitas implicadas, y de las cantidades arbitrarias que sean asignadas a dichas variables.

Pero existen casos en los cuales se necesita encontrar una solución que satisfaga no sólo a una ecuación, sino a dos, tres o incluso más ecuaciones. En este caso se habla de sistemas de ecuaciones lineales, ya que todas las ecuaciones implicadas deben satisfacerse por la misma solución. En este caso, no sólo se debe contemplar el número de incógnitas involucradas, también se considera el número de ecuaciones implicadas.

Un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas y m ecuaciones sobre el conjunto de los números complejos se define como:

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & \cdots & +a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +a_{m3}x_3 & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

donde los coeficientes a_{ij} y los términos b_j son números complejos.

La solución del sistema de ecuaciones lineales esta dado por el conjunto ordenado de valores $k_i \in \mathbb{C}$, tales que

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}k_1 & +a_{12}k_2 & +a_{13}k_3 & \cdots & +a_{1n}k_n & = & b_1 \\
a_{21}k_1 & +a_{22}k_2 & +a_{23}k_3 & \cdots & +a_{2n}k_n & = & b_2 \\
a_{31}k_1 & +a_{32}k_2 & +a_{33}k_3 & \cdots & +a_{3n}k_n & = & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}k_1 & +a_{m2}k_2 & +a_{m3}k_3 & \cdots & +a_{mn}k_n & = & b_m
\end{array}
$$

Por lo que el conjunto solución satisface a todas y cada una de las ecuaciones del sistema simultáneamente.

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales por el número de de soluciones existentes

Al igual que las soluciones de una ecuación lineal, los sistemas de ecuaciones también pueden presentar diferentes casos al momento de obtener sus soluciones. En este caso, dependiendo de la naturaleza de la solución que se tenga; dicha clasificación se presenta en la figura 5.2.

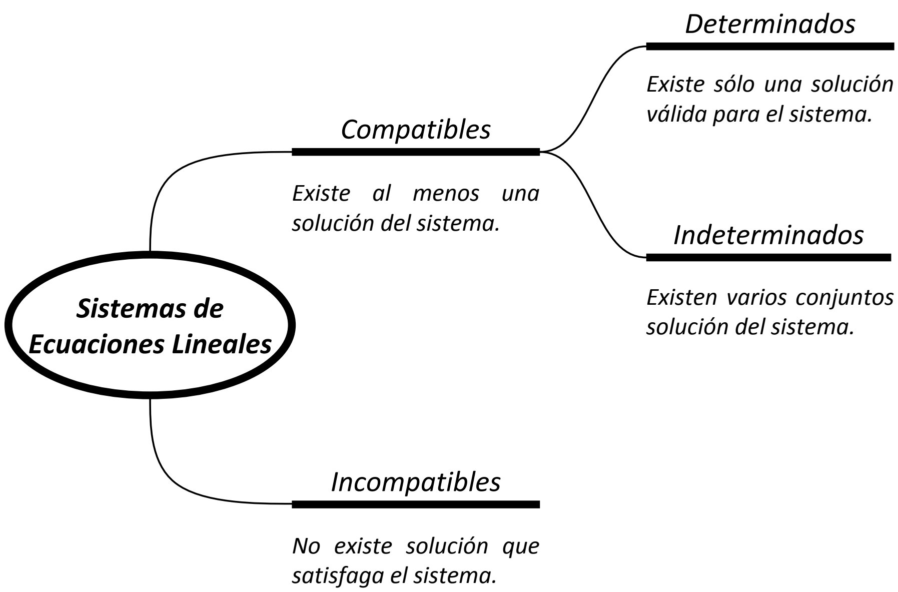

Figura 5.2. Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 5.4. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{array}{cccccc}
x & +y & +z & = & 4 & \dots(1) \\
-2x & -10y & -2z & = & 3 & \dots(2) \\
x & +5y & +z & = & 1 & \dots(3)
\end{array}
$$

Se puede observar que si la ecuación (2) se divide entre –2, se obtendrá el siguiente sistema equivalente:

$$
\begin{array}{cccccc}
x & +y & +z & = & 4 & \dots(1) \\
x & +5y & +z & = & 1.5 & \dots(2') \\
x & +5y & +z & = & 1 & \dots(3)
\end{array}
$$

Al restar la ecuación (3) de la ecuación (2’) se tendría la siguiente reducción:

$$\begin{array}{cccccl} x & +y & +z & = & 4 & \ldots(1) \\ x & +5y & +z & = & 1.5 & \ldots(2') \\ 0x & +0y & +0z & = & 0.5 & \ldots(3') \end{array}$$

Donde se obtiene una ecuación nula igualada a un término no nulo, lo cual indica que la ecuación no tiene solución; por lo tanto, el sistema no tiene solución, y corresponde a un sistema incompatible.

EJEMPLO 5.5. Para el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{cccccl} 3x & +2y & +z & = & 2 & \ldots(1) \\ x & +3y & +2z & = & 0 & \ldots(2) \\ x & +y & +z & = & 1 & \ldots(3) \end{array}$$

Al restar la ecuación (3) de la ecuación (2) se tiene la siguiente reducción:

$$\begin{array}{cccccl} 3x & +2y & +z & = & 2 & \ldots(1) \\ x & +3y & +2z & = & 0 & \ldots(2) \\ 0x & +2y & +z & = & -1 & \ldots(3') \end{array}$$

Se multiplica por –3 la ecuación (2) y se suma a la ecuación (1):

$$\begin{array}{cccccl} 3x & +2y & +z & = & 2 & \ldots(1) \\ 0x & -7y & -5z & = & 2 & \ldots(2') \\ 0x & +2y & +z & = & -1 & \ldots(3') \end{array}$$

La ecuación (3’) se multiplica por $\frac{7}{2}$ y se suma a la ecuación (2’):

$$\begin{array}{cccccl} 3x & +2y & +z & = & 2 & \ldots(1) \\ 0x & -7y & -5z & = & 2 & \ldots(2') \\ 0x & +0y & -1.5z & = & -1.5 & \ldots(3'') \end{array}$$

De la ecuación (3’’) se observa que $z = 1$. Al sustituir este valor en la ecuación (2’), se tiene que $y = -1$. Finalmente, los dos valores obtenidos se sustituyen en la ecuación (1), y se obtiene que el último valor es $x = 1$, y se completa la solución $(x, y, z) = (1, -1, 1)$. El sistema es compatible determinado.

EJEMPLO 5.6. Ahora, el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{cccccl} -7x & +6y & +z & = & -2 & \ldots(1) \\ 3x & -3y & & = & 0 & \ldots(2) \\ -x & & +z & = & -2 & \ldots(3) \end{array}$$

De la ecuación (2) se puede llegar a la conclusión de que $y = x$. Al sustituir esta condición en la ecuación (1) se obtiene el siguiente sistema reducido:

$$\begin{array}{ccccl} -x & +z & = & -2 & \ldots(1') \\ -x & +z & = & -2 & \ldots(3) \end{array}$$

Como se trata de la misma ecuación, se concluye que el sistema es compatible indeterminado, ya que el valor de z queda como $z = x - 2$. Por lo tanto, la solución general del sistema está en función de un parámetro (o variable libre); la solución es $(x, y, z) = (x, x, x - 2)$. Finalmente, se observa que el sistema es compatible indeterminado.

La solución de este tipo de sistemas también puede representarse como

$$S = \{(x, x, x - 2) | x \in \mathbb{R}\}$$

Esta representación es el conjunto solución.

Sistemas homogéneos, soluciones triviales y varias soluciones

Existe un caso particular de los sistemas de ecuaciones lineales; se trata del único caso, independientemente del número de ecuaciones, de incógnitas o de coeficientes nulos que posea, que siempre tendrá solución. Se trata de sistemas cuyos términos independientes son siempre iguales a cero:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & \cdots & +a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & \cdots & +a_{2n}x_n & = & 0 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & \cdots & +a_{3n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +a_{m3}x_3 & \cdots & +a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Este tipo de sistemas se conocen como sistemas de ecuaciones lineales homogéneos; siempre son compatibles, pero pueden ser determinados o indeterminados; es decir, admiten dos tipos de soluciones:

1. La solución es el conjunto $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (0, 0, 0, \ldots, 0)$, que es conocida como la solución nula o trivial; en este caso el sistema siempre es determinado.

2. Existe otra solución diferente a la nula, en este caso la solución es de un sistema indeterminado.

EJEMPLO 5.7. Sea el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{array}{ccccc} x & +y & -z & = & 0 & \ldots(1) \\ 2x & +4y & -z & = & 0 & \ldots(2) \\ 3x & +2y & +2z & = & 0 & \ldots(3) \end{array}$$

Al multiplicar por 2 la ecuación (1) y restarla a la ecuación (2), y después al multiplicar la ecuación (1) por 3 y restarla a la ecuación (3), el sistema se reduce a:

$$\begin{array}{ccccc} x & +y & -z & = & 0 & \ldots(1) \\ 0x & -2y & -z & = & 0 & \ldots(2') \\ 0x & +y & -5z & = & 0 & \ldots(3') \end{array}$$

Al multiplicar la ecuación (3) por 2 y sumándola a la ecuación (2) se tiene que:

$$\begin{array}{ccccc} x & +y & -z & = & 0 & \ldots(1) \\ 0x & -2y & -z & = & 0 & \ldots(2') \\ 0x & +0y & -11z & = & 0 & \ldots(3'') \end{array}$$

Y al sustituir en las demás ecuaciones el valor de $z = 0$ obtenido, se tiene que la única solución que admite el sistema es la solución trivial.

EJEMPLO 5.8. Sea el sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccccll} x & +y & -z & = & 0 & \dots(1) \\ 2x & -3y & +z & = & 0 & \dots(2) \\ x & -4y & +2z & = & 0 & \dots(3) \end{array}$$

Al restar la ecuación (3) de la ecuación (1), y al multiplicar la ecuación (1) por 2 y restándole la ecuación (2), la reducción queda como:

$$\begin{array}{ccccll} x & +y & -z & = & 0 & \dots(1) \\ 0x & +5y & -3z & = & 0 & \dots(2') \\ 0x & +5y & -3z & = & 0 & \dots(3') \end{array}$$

Las ecuaciones (2) y (3) son la misma, esto quiere decir que el sistema tiene una solución no nula, ya que al sustituir el valor $z = \frac{5}{3}y$ en la ecuación (1) se tiene que la solución general del sistema es

$$S = \left\{ \left(\frac{2}{3}y, y, \frac{5}{3}y \right) \middle| y \in \mathbb{R} \right\}$$

Al darle valores arbitrarios a este conjunto solución se puede verificar que el sistema de ecuaciones se satisface correctamente.

Para $y = 3$, la solución es

$$S = (2, 3, 5)$$

$$\begin{array}{ccccc} (2) & +(3) & -(5) & = & 0 \\ 2(2) & -3(3) & +(5) & = & 0 \\ (2) & -4(3) & +2(5) & = & 0 \end{array}$$

Si se diese otro valor arbitrario, se tendría la satisfacción del sistema.

Sistemas equivalentes y transformaciones elementales

Como se ha observado, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales está basada en el comportamiento de los coeficientes y los términos independientes. Al igual que la división sintética en la resolución de polinomios, es posible encontrar un arreglo de coeficientes para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Dicho arreglo se expresa de forma tabular, excluyendo los símbolos de las variables, como a continuación se expone.

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & \cdots & +a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +a_{m3}x_3 & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Puede omitirse todas las incógnitas del sistema, considerando que la primera columna corresponde a la variable x_1, la segunda columna a la variable x_2, y la tercera columna a la variable x_3, y así sucesivamente hasta la variable x_n; si alguno de los coeficientes del sistema no está explícitamente anotado, entonces se considera un coeficiente nulo y se coloca un cero en el lugar correspondiente.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & = & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & = & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & = & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & = & b_m \end{matrix}$$

Los símbolos de igualdad se omiten; en su lugar se puede colocar una línea vertical para separar los coeficientes de los términos independientes.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & | & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{matrix}$$

Finalmente, se coloca el arreglo dentro de un paréntesis o corchete cuadrado, y se tendría un arreglo con filas y columnas como el siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & | & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & | & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}$$

Dicho arreglo se conoce como **matriz** de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 5.9. El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{matrix} 3x & -2y & +z & = & -1 \\ x & -2y & +3z & = & 1 \\ & 6y & -2z & = & 4 \end{matrix}$$

tiene como matriz de coeficientes a

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & | & -1 \\ 1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 6 & -2 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Matrices y transformaciones elementales

Una matriz de m renglones con n columnas es un arreglo tabular definido como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde los elementos a_{ij} pueden ser, en general, números complejos.

Dentro de una matriz se puede realizar una serie de operaciones entre los renglones; dichos movimientos se les conoce como transformaciones elementales, las cuales consisten en multiplicaciones y sumas. Existen tres tipos de transformaciones elementales:

1. Intercambio de dos renglones.
2. Multiplicación de un renglón por un número diferente de cero.
3. Suma de un renglón con otro renglón, reemplazando éste último por el resultado obtenido.

Al momento de realizar una transformación elemental, se obtiene una nueva matriz, que se conoce con el nombre de matriz equivalente; las matrices equivalentes heredan las propiedades de sus respectivas originales, ya que provienen de una matriz transformada.

Dentro de las matrices existen formas muy útiles para la resolución de ecuaciones lineales. Estas formas se conocen como matriz escalonada y matriz escalonada canónica.

EJEMPLO 5.10. Del sistema de ecuaciones del ejemplo 5.9

$$\begin{matrix} 3x & -2y & +z & = & -1 \\ x & -2y & +3z & = & 1 \\ & 6y & -2z & = & 4 \end{matrix}$$

se obtuvo el siguiente arreglo matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & | & -1 \\ 1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 6 & -2 & | & 4 \end{pmatrix}$$

El lado izquierdo de la matriz se conoce como matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales; si se agrega la columna de términos independientes al arreglo, se conoce como matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales.

Se pueden realizar las siguientes transformaciones elementales para obtener una matriz equivalente:

1. El segundo reglón de la matriz equivalente es resultado de la multiplicación por –3 ($R_2 \to -3R_2$).

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & | & -1 \\ -3 & 6 & -9 & | & -3 \\ 0 & 6 & -2 & | & 4 \end{pmatrix}$$

2. El segundo renglón es equivalente a la suma del primer renglón más el segundo renglón ($R_2 \to R_1 + R_2$).

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 4 & -8 & | & -4 \\ 0 & 6 & -2 & | & 4 \end{pmatrix}$$

3. El segundo puede multiplicarse por $\frac{3}{4}$ ($R_2 \to \frac{3}{4}R_2$).

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 3 & -6 & | & -3 \\ 0 & 6 & -2 & | & 4 \end{pmatrix}$$

4. El tercer renglón se multiplica por $-\frac{1}{2}$ $(R_3 \to -\frac{1}{2}R_3)$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 3 & -6 & | & -3 \\ 0 & -3 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

5. El tercer renglón se sustituye por la suma del segundo renglón más el tercer renglón $(R_3 \to R_2 + R_3)$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 3 & -6 & | & -3 \\ 0 & 0 & -5 & | & -5 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz se conoce como matriz escalonada, ya que la primera entrada diferente de cero de un renglón está a la derecha de la primera entrada nula del renglón anterior; en otras palabras, en la matriz se forma una escalera descendente de ceros con dirección a la derecha.

Otros ejemplos de matrices escalonadas son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hay que hacer hincapié en el hecho de que si existe un renglón con coeficientes nulos, éste debe colocarse hasta el fondo de la matriz para que ésta se considere escalonada.

La matriz escalonada se puede poner en forma canónica si se cumplen los siguientes puntos:

- ✓ Cada entrada principal de renglón es igual a 1.
- ✓ Cada entrada principal de renglón es la única diferente de cero en la columna en la cual se ubica.

De las matrices siguientes, la matriz A está en forma escalonada canónica; en cambio, la matriz B no lo está.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse al efectuar transformaciones elementales en la matriz ampliada correspondiente.

EJEMPLO 5.11. Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{cccccccc} v & +2w & -3x & -2y & +4z & = & 1 \\ 2v & +5w & -8x & -y & +6z & = & 4 \\ v & +4w & -7x & +5y & +2z & = & 8 \end{array}$$

tiene su matriz ampliada en

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & | & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & | & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & | & 8 \end{pmatrix}$$

que al aplicar transformaciones elementales se reduce a una matriz equivalente con la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & | & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & | & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix}$$

la cual representa a un sistema de ecuaciones con las mismas soluciones que el planteado originalmente; dicho sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\begin{array}{cccccccc} v & & +x & & +24z & = & 21 \\ & w & -2x & & -8z & = & -7 \\ & & & y & +2z & = & 3 \end{array}$$

cuyo conjunto solución es

$$S = \{(21 - x - 24z, -7 + 2x + 8z, x, 3 - 2z, z) | x, z \in \mathbb{R}\}$$

Cuando dos sistemas de ecuaciones lineales tienen las mismas soluciones, se dice que ambos son equivalentes. Así, las soluciones del último sistema de ecuaciones satisfacen al sistema original. Este método, en el cual se realizan transformaciones elementales en la matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales hasta obtener una matriz escalonada, se conoce como método de Gauss.

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss

Este método propone eliminar consecutivamente, por medio de transformaciones elementales, una incógnita del sistema de ecuaciones lineales hasta obtener la matriz escalonada de un sistema equivalente al que se está resolviendo. También se indica la utilización de un pivote, el cual permitirá la eliminación de las variables hasta llegar a la solución.

EJEMPLO 5.12. Se desea resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & = & -1 \\ -2x_1 & -4x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

La matriz ampliada asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 3 & 4 & 1 & | & -1 \\ -2 & -4 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

A la cual se le aplican transformaciones elementales para llegar a un sistema equivalente. Para escalonar la matriz, se considera el primer elemento no nulo del renglón como pivote para escalonar el renglón siguiente; es decir, el primer elemento no nulo servirá para obtener ceros debajo de él en la columna a la cual pertenece. Se indica el pivote en cada transformación con el símbolo ○.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 3 & 4 & 1 & | & -1 \\ -2 & -4 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

1. $R_3 \to 2R_1 + R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 3 & 4 & 1 & | & -1 \\ 0 & -2 & 3 & | & 6 \end{pmatrix}$$

2. $R_2 \to -3R_1 + R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & -5 & | & -10 \\ 0 & -2 & 3 & | & 6 \end{pmatrix}$$

3. $R_3 \to 2R_2 + R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & -5 & | & -10 \\ 0 & 0 & -7 & | & -14 \end{pmatrix}$$

4. $R_3 \to -\frac{1}{7}R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & -5 & | & -10 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución del sistema de ecuaciones planteado es $(-1, 0, 2)$. El pivote sirve para facilitar la anulación de coeficientes a través del proceso de transformación. Hay que tomar en cuenta que pueden obtenerse sistemas indeterminados o incompatibles al momento de escalonar una matriz asociada a un sistema de ecuaciones. Estos casos se presentan cuando:

a. Al escalonar una matriz, uno o más renglones quedan nulos; es decir, sólo hay ceros en el renglón. Por ejemplo, sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales y su matriz asociada:

$$\begin{matrix} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 3 \\ x_1 & -2x_2 & -3x_3 & = & -7 \\ -2x_1 & -2x_2 & -4x_3 & = & -6 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 1 & -2 & -3 & | & -7 \\ -2 & -2 & -4 & | & -6 \end{pmatrix}$$

Al escalonar la matriz se tendrá el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 3 & 5 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

el cual es un sistema compatible indeterminado, ya que en el tercer renglón sólo hay coeficientes nulos.

b. Al escalonar una matriz, uno o más renglones quedan con coeficientes nulos, y el término independiente es diferente de cero; es decir, todos los coeficientes del renglón excepto el término independiente son ceros. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones siguiente tiene su propia matriz asociada.

$$\begin{matrix} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 3 \\ x_1 & -2x_2 & -3x_3 & = & -7 \\ -2x_1 & -2x_2 & -4x_3 & = & -8 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 1 & -2 & -3 & | & -7 \\ -2 & -2 & -4 & | & -8 \end{pmatrix}$$

Al escalonar su matriz asociada, se obtendrá el siguiente equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 3 & 5 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$$

lo cual implica que se trata de un sistema incompatible. Cuando al escalonar una matriz de coeficientes se obtiene un renglón de la forma $(0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad | \quad b)$ se dice que la ecuación resultante asociada se ha degenerado; es decir, es una ecuación lineal degenerada.

EJEMPLO 5.13. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{matrix} x & +2y & +2z & = & 2 \\ 3x & -2y & -z & = & 5 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ x & +4y & +2\alpha z & = & 0 \end{matrix}$$

Determínese los valores $\alpha \in \mathbb{R}$ que hacen al sistema:

- ✓ Incompatible.
- ✓ Compatible indeterminado.
- ✓ Compatible determinado.

Primero se debe escalonar la matriz de coeficientes ampliada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ 3 & -2 & -1 & | & 5 \\ 2 & -5 & 3 & | & -4 \\ 1 & 4 & 2\alpha & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ 0 & 8 & 7 & | & 1 \\ 0 & 9 & 1 & | & 8 \\ 0 & -2 & 2-2\alpha & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & -6 & | & 7 \\ 0 & 9 & 1 & | & 8 \\ 0 & -2 & 2-2\alpha & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & -6 & | & 7 \\ 0 & 0 & -55 & | & 55 \\ 0 & 0 & -10-2\alpha & | & 16 \end{pmatrix}$$

El penúltimo renglón arroja el resultado $-55z = 55$, por lo que $z = -1$. Para que el sistema sea compatible determinado, el último renglón debe ser múltiplo del penúltimo; es decir

$$(-10 - 2\alpha)z = 16$$
$$10 + 2\alpha =$$

De ahí, el valor $\alpha = 3$ hace al sistema compatible determinado. Cualquier otro valor, arrojará una ecuación degenerada; es decir $\alpha \neq 3$ hace al sistema incompatible. Finalmente, no existen valores que hagan al sistema compatible indeterminado.

Aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales

Los SEL son una herramienta importante para resolver varios tipos de problemas, desde resolver una red eléctrica hasta interpretar lugares geométricos.

EJEMPLO 5.14. Determínese la intersección entre el plano $\pi: -2x+2y+6z=0$ y la recta $L: \bar{p}=(1,1,0)+t(1,2,1)$.

Para encontrar el lugar geométrico se requiere un sistema de ecuaciones lineales. La ecuación del plano por sí sola es una ecuación lineal. La recta, al ser la intersección de varios planos arrojará el resto de ecuaciones que se necesitan. Entonces, al manejar la ecuación vectorial de L se tiene

$$(1,1,0)+t(1,2,1)=\bar{p}$$
$$=(x,y,z) \Rightarrow L=\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}$$

De las ecuaciones paramétricas $z=t$; a partir del parámetro se obtienen las ecuaciones cartesianas de la recta:

$$x=1+t \Rightarrow x=1+z \therefore x-z=1$$

$$y=1+2t \Rightarrow y=1+2z \therefore y-2z=1$$

entonces, el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{array}{cccccc} -2x & +2y & +6z & = & 0 \\ x & & -z & = & 1 \\ & y & -2z & = & 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} -2 & 2 & 6 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -2 & 2 & 6 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 4 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \end{array}\right)$$

La solución es $x=1$, $y=1$ y $z=0$. Lo cual indica que la intersección es el punto $(1,1,0)$. La figura 5.3 muestra el punto de intersección entre el plano y la recta.

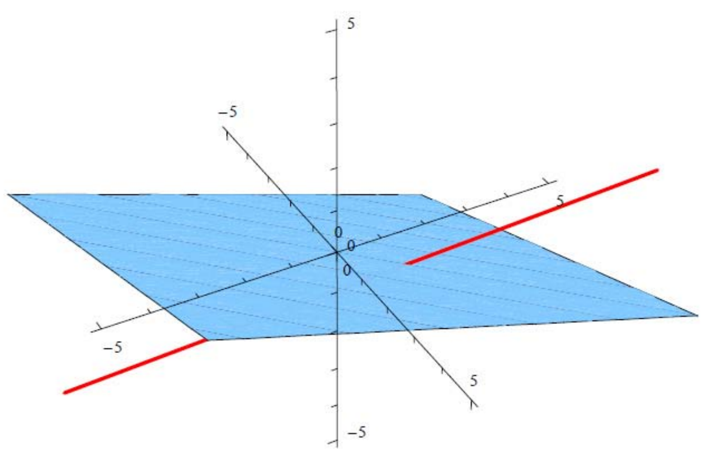

Figura 5.3. Punto de intersección entre la recta L y el plano π.