.

1. Operación Binaria

La operación binaria $(*)$ en un conjunto S es una relación $f : S \times S$ que asigna un par de elementos $a, b \in S$ con un tercero c, que puede o no pertenecer a S, llamado resultado. Al par $(S, *)$ se le denominará estructura, si la operación definida cumple con ciertas propiedades.

1.1. Propiedades de las Operaciones Binarias

Con una operación binaria $(*)$ definida en un conjunto S, se plantean las siguientes propiedades:

Cerradura. Si el resultado de aplicar la operación a dos elementos $a, b \in S$ está definido en S, entonces la operación es cerrada. Esta propiedad también puede llamar a una operación binaria ley de composición interna.

$$a * b \in S$$

Asociación. Si la operación es binaria, entonces no puede operar tres elementos a la vez. Aquí surge la necesidad de trabajar dos elementos y después operar el resultado con el tercer elemento; esta característica es la propiedad de asociación.

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Existencia del elemento neutro. Si existe un elemento $e \in S$, tal que al operarlo con otro elemento $a \in S$ no altera a éste último, entonces se habla de un elemento neutro.

$$a * e = a$$

Existencia de elementos inversos. Esta propiedad se relaciona directamente con el elemento neutro. Si al operar dos números $a, b \in S$ se obtiene el elemento neutro, entonces los dos elementos son inversos uno del otro.

$$a * \breve{a} = e$$

Conmutatividad. Si en la operación binaria no hay orden para trabajar los elementos, se dice que la operación permite la conmutación.

$$a * b = b * a$$

Distribución. Al definirse una segunda operación $(\circ)$ dentro del conjunto, puede establecer una propiedad que permita utilizar ambas operaciones, donde la segunda operación se distribuya sobre la primera.

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$$

Esta propiedad introduce el concepto de *factorización*.

2. Grupo

Dado un conjunto no vacío G con una operación binaria $(*)$ definida. El sistema $(G, *)$ es un grupo si cumple con:

- cerradura.
- asociación.
- elemento neutro.
- elementos inversos.

Ejemplo

Sea el conjunto $\mathbb{Z}$ donde se define la operación

$$a \,\Delta\, b = a + b - 3 \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$$

Al observar la operación se pueden probar las cuatro propiedades.

Cerradura. Por suma en los enteros $a + b \in \mathbb{Z}$ y al restar $-3 \in \mathbb{Z}$ se obtiene otro entero. Por lo tanto, la operación es cerrada.

Asociación.

$$\begin{aligned}(a \,\Delta\, b) \,\Delta\, c &= a \,\Delta\, (b \,\Delta\, c)\\ (a+b-3) \,\Delta\, c &= a \,\Delta\, (b+c-3)\\ (a+b-3)+c-3 &= a+(b+c-3)-3\\ a+b+c-6 &= a+b+c-6\end{aligned}$$

La igualdad al desarrollar ambos extremos se cumple; por lo tanto, la operación es asociativa.

Elemento neutro.

$$\begin{aligned}a \,\Delta\, e &= a\\ a+e-3 &= a\\ e &= a-a+3\\ e &= 3\end{aligned}$$

Existe un único entero que aplica como neutro. Por lo tanto, la propiedad se cumple.

Elemento inverso.

$$\begin{aligned}a \,\Delta\, \breve{a} &= e\\ a+\breve{a}-3 &= 3\\ \breve{a} &= 3+3-a\\ \breve{a} &= 6-a\end{aligned}$$

Cada elemento $a \in \mathbb{Z}$ tiene su propio inverso. Por lo tanto, la propiedad se cumple. En conclusión, el sistema $(\mathbb{Z}, \Delta)$ es un grupo.

2.1. Grupo Abeliano o Conmutativo

El grupo abeliano debe su nombre al noruego Niels Abel, uno de los pioneros del álgebra Moderna. Dado un grupo $(G, *)$, Éste se convierte en abeliano si se cumple con:

- conmutación.

Ejemplo

Sea el sistema $(\mathbb{Q}^+, \diamond)$ donde

$$a \diamond b = \frac{3}{2}ab \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Q}^+$$

La demostración del grupo abeliano es:

Cerradura. Por producto en los racionales $ab \in \mathbb{Q}$ y al multiplicar por $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ se obtiene otro racional; los tres números son positivos, entonces el resultado del producto siempre será positivo. Por lo tanto, se cumple la cerradura.

Asociación.

$$\begin{aligned}(a \diamond b) \diamond c &= a \diamond (b \diamond c)\\ \left(\frac{3}{2}ab\right) \diamond c &= a \diamond \left(\frac{3}{2}bc\right)\\ \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}ab\right)c &= \frac{3}{2}a\left(\frac{3}{2}bc\right)\\ \frac{9}{4}abc &= \frac{9}{4}abc\end{aligned}$$

La igualdad se cumple. En consecuencia, la operación es asociativa.

Elemento neutro.

$$\begin{aligned}a &= a \diamond e\\ a &= \frac{3}{2}ae\\ 1 &= \frac{3}{2}e\\ \frac{2}{3} &= e\end{aligned}$$

Existe un racional positivo que aplica como neutro, además de ser único. Por lo tanto, la propiedad se cumple.

Elemento inverso.

$$\begin{aligned} e &= a \diamond \breve{a} \\ \frac{2}{3} &= \frac{3}{2}a\breve{a} \\ \frac{4}{9a} &= \breve{a} \end{aligned}$$

Cada elemento $a \in \mathbb{Q}^+$ tiene su propio inverso. Por lo tanto, la propiedad se cumple.

Conmutación.

$$\begin{aligned} a \diamond b &= b \diamond a \\ \frac{3}{2}ab &= \frac{3}{2}ba \end{aligned}$$

Por conmutación en los racionales la propiedad se satisface. Al cumplir con las cinco propiedades, se concluye que el sistema $(\mathbb{Q}^+, \diamond)$ es un grupo abeliano.

Uno de los juegos más conocidos en el mundo, es el cubo Rubik. Inventado por el arquitecto húngaro Erno Rubik, este rompecabezas mecánico puede modelarse a partir del grupo abeliano, donde los movimientos de las caras representan el conjunto de elementos, y la composición de movimientos (giro tras giro) es la operación binaria definida.