.

1. Efectos Geométricos de las Transformaciones Lineales

El Álgebra Lineal contiene conceptos muy abstractos, que en muchos casos no tienen conexión con argumentos geométricos o físicos. Más de un estudiante puede sentirse alejado de la realidad al estudiar los conceptos relativos a los espacios vectoriales. Sin embargo, los objetos o fenómenos físicos pueden modelarse con base en elementos de un espacio vectorial.

La simetría puede encontrarse fácilmente en la Naturaleza: una mariposa, un copo de nieve, un helecho, un trébol, en el reflejo que produce un espejo, etc. La simetría puede modelarse mediante vectores y una transformación lineal; el lugar de referencia puede ser un punto, una recta o un plano. Adicionalmente a la transformación lineal, se utilizan otros conceptos como el producto interno o la proyección ortogonal.

Ejemplo

Una transformación lineal puede convertir un punto $A(x,y)$ cualquiera en su simétrico con respecto a una recta, por ejemplo $y = -\frac{1}{2}x$.

Sea la base $C = \{\bar{e}_1 = (1,0), \bar{e}_2 = (0,1)\}$, de la cual se calcularán los simétricos de sus elementos. El procedimiento consiste en 1) obtener la componente vectorial (proyección) de los elementos de C sobre un vector director de la recta dada, y 2) encontrar el simétrico con sumas y restas de vectores.

La recta como subespacio es $L = \left\{\left(x, -\frac{1}{2}x\right) | x \in \mathbb{R}\right\}$, donde $\bar{v} = (2,-1)$ es un vector director.

$$\text{Proy}_{\bar{v}}\bar{e}_1 = \frac{(1,0)\cdot(2,-1)}{(2,-1)\cdot(2,-1)}(2,-1) \Rightarrow \frac{2}{5}(2,-1)$$

La distancia entre la componente vectorial y el vector $\bar{e}_1$ es

$$\bar{d}_1 = (1,0) - \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Finalmente, el simétrico de $\bar{e}_1$ es

$$\left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right) - \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

Para el vector $\bar{e}_2$ se sigue el mismo procedimiento, resultando que

$$\bar{d}_2 = (0,1) - \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) \Rightarrow \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

y finalmente el simétrico es

$$\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

Por combinación lineal y aplicación de la transformación

$$\begin{aligned} x(1,0) + y(0,1) &= (x,y) \\ xT(1,0) + yT(0,1) &= T(x,y) \\ x\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) + y\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) &= \end{aligned}$$

La transformación buscada es $T(x,y) = \frac{1}{5}(3x - 4y, -4x - 3y)$.

Otro efecto geométrico interesante es la rotación. Cuando en un sistema de coordenadas se rotan los puntos un determinado ángulo, se puede modelar la trayectoria circular que recorre un móvil y estudiar el movimiento; incluso, se pueden crear complejos dibujos con un sólo punto y una transformación que permita rotarlo en diferentes ángulos. La rotación sólo afecta la posición del vector, nunca su tamaño.

Ejemplo.

Para rotar un punto $A(x,y)$ un ángulo dado, por ejemplo $\varphi = 45°$ en sentido antihorario, se necesita una base, como $C = \{\bar{e}_1 = (1,0), \bar{e}_2 = (0,1)\}$, y las respectivas transformaciones de sus elementos.

La rotación de $\bar{e}_1$ se obtiene al multiplicar la magnitud por el coseno y el seno del ángulo dado

$$\bar{r}_1 = |\bar{e}_1|(\cos 45°, \sin 45°) \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

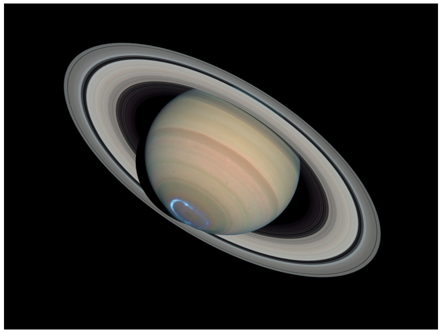
Para el vector $\bar{e}_2$ es lo mismo, con la salvedad que la rotación caerá en el segundo cuadrante (con abscisa negativa)

$$\bar{r}_2 = |\bar{e}_2| \left(-\cos 45^\circ, \sin 45^\circ\right) \Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Finalmente, por combinación lineal y aplicación de la transformación

$$\begin{aligned} x(1,0) + y(0,1) &= (x,y) \\ xT(1,0) + yT(0,1) &= T(x,y) \\ x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \end{aligned}$$

La transformación buscada es $T(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y)$.



Este tipo de transformaciones permiten dibujar un objeto en tiempo real, en lugar de concebirlo completamente antes de mostrarse, con base en la transformación y unos pocos datos del objeto.

Otras transformaciones pueden modificar las dimensiones de los puntos que conforman un objeto, como las homotecias (escalamiento) y en algunos casos también combinar una rotación con un escalamiento para obtener las llamadas proyecciones, como la ortogonal.

Las proyecciones permiten generar elementos geométricos con base en datos ya conocidos, utilizando conceptos de distancia, tamaño y reflexión. En el estudio del Álgebra Lineal, este tipo de transformaciones lineales trabajan conjuntamente con la proyección ortogonal, que hace uso del producto interno definido en un espacio vectorial y del concepto de ángulo entre vectores.

Ejemplo

Obtén la proyección de cualquier punto en el espacio sobre el plano de ecuación $\pi: \ -3x + y - z = 0$. Un punto cualquiera es $P(x,y,z)$; entonces, es necesario encontrar el punto del plano más cercano a P. Es necesaria una base ortogonal para encontrar el vector correcto.

$$\pi = \{(x, 3x+z, z) \,|\, x, z \in \mathbb{R}\}$$

donde $\bar{v}_1 = (1,3,0)$ y v_2 es un vector tal que

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 \cdot (1,3,0) &= 0 \\ (x, 3x+z, z) \cdot (1,3,0) &= \\ 10x + 3z = 0 \therefore z = -\frac{10}{3}x & \end{aligned}$$

Entonces, $\bar{v}_2 = \left(x, -\frac{1}{3}x, -\frac{10}{3}x\right)$ y al dar un valor a x (por ejemplo 3) la base ortogonal requerida es $B = \{(1,3,0), (3,-1,-10)\}$.

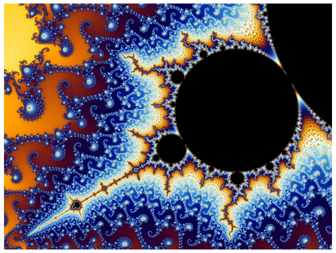
La proyección se genera como una combinación lineal de las componentes vectoriales del vector de posición de P sobre cada elemento de la base.

$$\begin{aligned} \mathrm{Proy}_\pi \bar{p} &= \frac{(x,y,z)\cdot(1,3,0)}{(1,3,0)\cdot(1,3,0)}(1,3,0) + \frac{(x,y,z)\cdot(3,-1,-10)}{(3,-1,-10)\cdot(3,-1,-10)}(3,-1,-10) \\ &= \frac{x+3y}{10}(1,3,0) + \frac{3x-y-10z}{110}(3,-1,-10) \\ &= \left(\frac{20x+30y-30z}{110}, \frac{30x+100y+10z}{110}, \frac{-30x+10y+100z}{110}\right) \\ &= \frac{1}{11}(2x+3y-3z, 3x+10y+z, -3x+y+10z) \end{aligned}$$

La proyección encontrada no es otra cosa que la regla de correspondencia de una transformación que proyecta un vector de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano dado:

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow T(x,y,z) = \frac{1}{11}(2x+3y-3z, 3x+10y+z, -3x+y+10z)$$

2. Fractales



Un campo actual para el desarrollo geométrico de las transformaciones lineales son los fractales, ya que estos pueden generarse utilizando sucesivamente dicha transformación sobre una imagen; es decir, aplicar la composición de una transformación sobre sí misma varias veces.

Un fractal no es más que un objeto semigeométrico que se repite a diferentes escalas sucesivamente. Sus características son: 1) posee detalle a cualquier escala de observación, 2) es autosimilar, y 3) se define mediante un simple algoritmo recursivo.