.

1. Operador Lineal

Se llama operador lineal a la transformación lineal definida por $T : V \to V$; es decir, una transformación donde el dominio y el codominio son el mismo espacio vectorial.

2. Valores y Vectores Propios

Sean V un espacio vectorial sobre un campo K y un operador lineal $T : V \to V$. En la relación

$$T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}, \qquad \forall\ \lambda \in K,\ \forall\ \bar{v} \neq \bar{0} \in V$$

a λ se le conoce como valor propio, y a $\bar{v}$ como vector propio, ambos del operador lineal T.

Ejemplo

Para el operador lineal $H : P_1 \to P_1 \Rightarrow H(ax+b) = (4a-5b)\,x + (2a-3b)$ se tiene que un vector como $p(x) = x+1$ se transforma al multiplicarlo por -1.

$$\begin{aligned} H(x+1) &= (4-5)\,x + (2-3) \\ &= -x-1 \end{aligned}$$

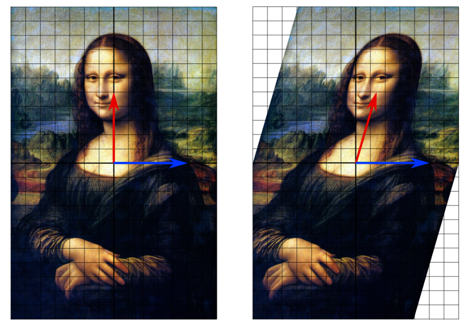
En tanto que vectores como $q(x) = -5x-2$ se transforman al multiplicarlos por 2.

$$\begin{aligned} H(-5x-2) &= [4(-5) - 5(-2)]\,x + [2(-5) - 3(-2)] \\ &= (-20+10)\,x + (-10+6) \\ &= -10x-4 \end{aligned}$$

En este ejemplo, los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$ que están asociados a los vectores $\bar{v}_1 = x+1$ y $\bar{v}_2 = -5x-2$, respectivamente.

Las propiedades siguientes son cumplidas por los vectores y valores propios:

- En la transformación identidad $I : V \to V$ los vectores propios están asociados al valor 1.
- En la transformación nula $O : V \to V$ todos los vectores propios se asocian al valor 0.
- Si $N(T) \neq \{\bar{0}\}$ entonces, todos sus elementos son vectores característicos del valor 0.
- El valor propio $\lambda = 0$ indica que la transformación no tiene inversa.
- Para vectores propios $\bar{u}, \bar{v}$ de T asociados al valor propio λ:
  1. el escalar λ es único para esos vectores.
  2. el vector $\alpha\bar{v}$ es un vector propio asociado a λ.
  3. el vector $\bar{u} + \bar{v}$ también es un vector propio asociado a λ.



Esta última propiedad establece las características de un subespacio vectorial. En consecuencia el conjunto de vectores propios asociados a un valor propio determinado constituye un subespacio vectorial llamado espacio característico o propio. Si $T : V \to V$ es un operador lineal y λ es un valor característico de T, entonces el conjunto

$$E(\lambda) = \{\bar{v} \mid \bar{v} \in V, T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}\}$$

se llama espacio característico asociado al valor λ.

2.1. Polinomio Característico; Obtención de Valores y Vectores Propios

Los valores característicos se obtienen del determinante

$$|A - \lambda I| = 0$$

el cuál se calcula con base en una matriz cuadrada A (que puede ser la matriz asociada al operador lineal). El resultado será un polinomio conocido como ecuación característica, cuyas raíces serán los valores propios. El grado del polinomio característico es igual al orden de la matriz.

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= 0 \\ a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 &= \end{aligned}$$

Tomando en consideración que la matriz asociada se multiplica por un vector de coordenadas, el producto matricial

$$(A - \lambda I)[\bar{v}] = [T(\bar{v})]$$

permitirá calcular el vector de coordenadas del espacio característico asociado a λ.

Ejemplo

Para el operador lineal $T : C \to C \Rightarrow T(x + yi) = (-2x + 4y) + (x + y)i$ se obtiene la matriz asociada referida a la base $B = \{1, i\}$.

$$\begin{aligned} T(1) &= -2 + i \Rightarrow -2(1) + 1(i) \\ T(i) &= 4 + i \Rightarrow 4(1) + 1(i) \end{aligned}$$

$$\therefore M(T) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando la ecuación característica:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (-2-\lambda)(1-\lambda) - 4 &= \\ \lambda^2 + \lambda - 6 &= 0 \therefore \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3 \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación matricial los valores

$$\begin{bmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y resolver el sistema de ecuaciones indeterminado resultante, se tiene

para $\lambda_1 \Rightarrow [E(2)]_B = (x, x)$.

para $\lambda_2 \Rightarrow [E(-3)]_B = (-4y, y)$.

Finalmente, al realizar la combinación lineal con la base propuesta

$$\begin{aligned} x(1) + x(i) &= x + xi \therefore E(2) = \{x + xi | x \in \mathbb{R}\} \\ -4y(1) + y(i) &= -4y + yi \therefore E(-3) = \{-4y + yi | y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Siendo éstos últimos los espacios característicos del operador lineal.

2.2. Teorema de Cayley-Hamilton

Toda matriz es una raíz de su propio polinomio característico; es decir, al evaluar un polinomio característico con su matriz se obtendrá como resultado la matriz nula.

Ejemplo

Sea la matriz

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Al obtener su ecuación característica,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (1-\lambda)(3-\lambda) - (-4) &= \\ 3 - 4\lambda + \lambda^2 + 4 &= \\ \lambda^2 - 4\lambda + 7 &= p(\lambda) \end{aligned}$$

y evaluarla con la matriz F,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 - 4\lambda + 7 \\ p(F) &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^2 - 4\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -8 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

se comprueba que F es raíz de su polinomio característico.

3. Diagonalización de Matrices

Dos matrices A y D son similares si

$$D = C^{-1}AC$$

Su principal propiedad es que sus determinantes son iguales, y tienen el mismo polinomio característico. Un operador lineal puede tener matrices asociadas similares, donde una de ellas es diagonal. Localizar dicha matriz diagonal se conoce como diagonalización.

La matriz C está formada con una base de vectores propios dispuestos en columna; la matriz diagonal D contiene a los valores propios del operador lineal. No todas las matrices pueden diagonalizarse.

Ejemplo

Determina si la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

es diagonalizable.

Primero se obtendrán los valores propios de la matriz:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)\left(\lambda^2-4\right) \\ 0 &= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2) \therefore \lambda_1=-2, \lambda_2=2 \end{aligned}$$

Con los valores propios se obtendrán los espacios característicos:

Para $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x=0, y=-z \therefore E(-2) = \{(0,-z,z) \,|z \in \mathbb{R}\}$$

Para $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow z = x+y \therefore E(2) = \{(x,y,x+y) \,|x,y \in \mathbb{R}\}$$

Como el orden de la matriz es 3, entonces la base de vectores propios contiene tres elementos. Éstos son $\bar{v}_1 = (0,-1,1) \in E(-2)$ y $\bar{v}_2 = (1,0,1), \bar{v}_3 = (0,1,1) \in E(2)$, donde la base es $B = \{(0,-1,1), (1,0,1), (0,1,1)\}$.

Finalmente, la matriz diagonalizadora C será cada vector de la base B en forma de columna:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, no todas las matrices tienen una matriz similar diagonal. Las condiciones necesarias para que una matriz A sea diagonalizable son:

- A es una matriz simétrica o hermítica.
- los valores propios son diferentes entre sí.
- la suma de las dimensiones de los espacios característicos es igual al orden de la matriz.
- existe una base del espacio vectorial formada por vectores propios.
- A es un múltiplo de la matriz identidad.