.

1. Espacio Vectorial

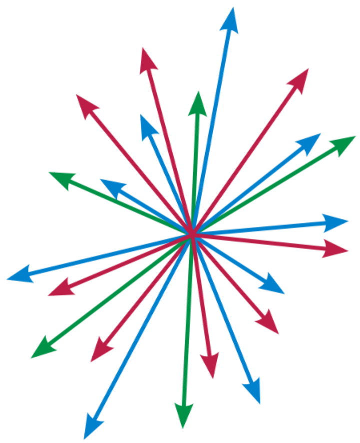
Los espacios vectoriales siempre han formado parte del entorno físico. Se trata de una estructura algebraica cuyas propiedades introducen los conceptos físicos de dirección, magnitud y sentido. En el Álgebra Lineal esas características se enuncian por medio de sumas y multiplicaciones.

Para un conjunto no-vacío V (sus elementos se llaman vectores) y un campo K (sus elementos se llaman escalares), se definen las operaciones:

- Adición de vectores (operación interna): $\forall\ \bar{u}, \bar{v} \in V$ existe un tercer vector $\bar{u} + \bar{v}$.
- Producto por un escalar (operación externa): $\forall\ \bar{u} \in V$ y $\forall\ \alpha \in K$ existe un segundo vector $\alpha\bar{u}$.

El conjunto V es un espacio vectorial sobre el campo K, si las operaciones definidas cumplen las siguientes propiedades:

1. $\bar{u} + \bar{v} \in V$
2. $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (u + \bar{v}) + \bar{w}$
3. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
4. $\bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$
5. $\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$
6. $\alpha\bar{u} \in V$
7. $(\alpha\beta)\bar{u} = \alpha(\beta\bar{u})$
8. $(\alpha + \beta)\bar{u} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{u}$
9. $\alpha(\bar{u} + \bar{v}) = \alpha\bar{u} + \alpha\bar{v}$
10. $1\bar{u} = \bar{u}$



Hay ejemplos básicos de espacios vectoriales como lo son polinomios, matrices o funciones. Incluso, los campos son espacios vectoriales sobre sí mismos.

Ejemplo

Determina si $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$ es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales. La prueba de cada axioma corresponde a demostrar que existen elementos complejos y se cumplen igualdades entre ellos.

Sean $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tomando a $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ y $\bar{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ la demostración se sigue a continuación.

Primera propiedad:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

El resultado es un elemento de $\mathbb{R}^2$ pues tiene dos componentes reales, considerando que la suma de números reales es otro número real. Se cumple la propiedad.

Segunda propiedad

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) &= \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Se llega a una igualdad; por lo tanto, la propiedad es válida

Tercera propiedad

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 + y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Se llega a una igualdad; por lo tanto, la propiedad se cumple.

Cuarta propiedad

Se define un posible elemento neutro $\bar{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 + e_1 \\ x_2 + e_2 \end{bmatrix} &= \end{aligned}$$

Por igualdad en las componentes $x_1 + e_1 = x_1 \Rightarrow e_1 = 0$ y $x_2 + e_2 = x_2 \Rightarrow e_2 = 0$. El elemento neutro (o vector nulo) es $\bar{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. La propiedad es válida.

Quinta propiedad.

Se define al posible elemento inverso $\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 + u_1 \\ x_2 + u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se aplica la igualdad entre componentes $x_1 + u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = -x_1$ y $x_2 + u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -x_2$. El vector inverso aditivo es $\bar{u} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Se concluye que la propiedad se satisface.

Sexta propiedad

$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

El producto de dos números reales resulta en un número real, por lo que las componentes del vector $\alpha \bar{x}$ son reales y la cerradura se satisface.

Séptima propiedad

$$\begin{aligned} (\alpha\beta) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \alpha \left(\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \alpha\beta x_1 \\ \alpha\beta x_2 \end{bmatrix} &= \alpha \begin{bmatrix} \beta x_1 \\ \beta x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha\beta x_1 \\ \alpha\beta x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se llega a una igualdad, por lo que la propiedad se cumple.

Octava propiedad

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (\alpha + \beta) x_1 \\ (\alpha + \beta) x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta x_1 \\ \beta x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta x_1 \\ \alpha x_2 + \beta x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta x_1 \\ \alpha x_2 + \beta x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La propiedad es válida.

Novena propiedad

$$\begin{aligned} \alpha \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) &= \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ \alpha \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha (x_1 + y_1) \\ \alpha (x_2 + y_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 \\ \alpha x_2 + \alpha y_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 \\ \alpha x_2 + \alpha y_2 \end{bmatrix} & \end{aligned}$$

Por igualdad, se satisface la propiedad.

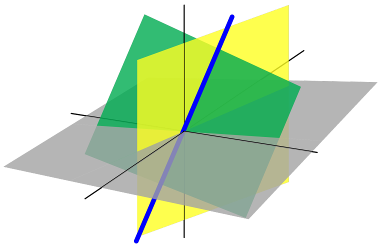
Décima propiedad

$$\begin{aligned} 1\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (1)x_1 \\ (1)x_2 \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \end{aligned}$$

Esta propiedad también se satisface. En vista que las diez propiedades de la definición de espacio vectorial se cumplen, el conjunto $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial sobre el campo de los reales.

2. Subespacio Vectorial

Al ser un conjunto, un espacio vectorial tiene una infinidad de subconjuntos; dichos subconjuntos pueden ser por sí mismos espacios vectoriales. Cuando un espacio vectorial es subconjunto de otro espacio vectorial, se dice que es un subespacio vectorial.



El subespacio cumplirá con las 10 propiedades de la definición de espacio. Sin embargo, la condición de subespacio se cumplirá si y sólo si

1. $\bar{u} + \bar{v} \in V$
2. $\alpha\bar{u} \in V$

El resto de axiomas del espacio vectorial son heredados a partir de los tres mencionados.

Ejemplo

Demuestra que el plano $\pi : x - y + z = 0$ es un subespacio vectorial, mientras que la recta $L : \begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$ no lo es.

Ambos lugares geométricos pueden reescribirse como

$$\pi : x - y + z = 0 \Rightarrow y = x + z \therefore \pi = \{(x, y, z)\,|y = x + z; x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$L : (x, y, z) = (t, -2 + t, 2t) \Rightarrow L = \{(t, -2 + t, 2t)\,|t \in \mathbb{R}\}$$

que forman subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

PLANO π

Cerradura para la suma de vectores:

$$(x_1, x_1 + z_1, z_1) + (x_2, x_2 + z_2, z_2) = (x_1 + x_2, (x_1 + z_1) + (x_2 + z_2), z_1 + z_2)$$

Si $x_1 + x_2 = x$ y $z_1 + z_2 = z$ entonces

$$(x_1 + x_2, (x_1 + x_2) + (z_1 + z_2), z_1 + z_2) = (x, x + z, z) \in \pi$$

Cerradura para la multiplicación por un escalar:

$$\alpha(x_1, x_1 + z_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha x_1 + \alpha z_1, \alpha z_1)$$

Si $\alpha x_1 = x$ y $\alpha z_1 = z$ entonces

$$(\alpha x_1, \alpha x_1 + \alpha z_1, \alpha z_1) = (x, x + z, z) \in \pi$$

RECTA L

Cerradura para la suma de vectores:

$$(t_1, -2 + t_1, 2t_1) + (t_2, -2 + t_2, 2t_2) = (t_1 + t_2, -4 + (t_1 + t_2), 2(t_1 + t_2))$$

Si $t_1 + t_2 = t$ entonces

$$(t_1 + t_2, -4 + (t_1 + t_2), 2(t_1 + t_2)) = (t, -4 + t, 2t) \notin L$$

Se observa que la componente $y = -4 + t$ no coincide con las ecuaciones paramétricas de L; es decir, la suma de dos puntos de la recta no pertenece a dicho lugar geométrico. En consecuencia la recta L no es un subespacio vectorial.