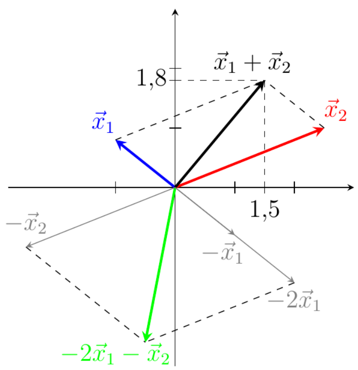
.

1. Combinación Lineal

Cuando se aplica la suma de vectores y la multiplicación por un escalar a un conjunto de vectores, se realiza una combinación lineal. Es decir, la combinación lineal es una expresión del tipo

$$\alpha_1\bar{v}_1+\alpha_2\bar{v}_2+\alpha_3\bar{v}_3+\cdots+\alpha_n\bar{v}_n=\bar{x}$$

Por lo tanto, un vector $\bar{x}$ cualquiera se puede obtener a partir de otros.



Ejemplo

Sea un bloque sostenido por dos cuerdas sobre un plano inclinado donde no hay rozamiento. El sistema está en reposo. Las fuerzas que actúan sobre el bloque ($\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ y $\bar{W}$) son elementos de un espacio vectorial. Como el sistema está en equilibrio estático, la resultante de la suma de fuerzas es el vector nulo; es decir

$$\bar{F}_1+\bar{F}_2+\bar{W}=\bar{0}$$

lo cual es una combinación lineal de fuerzas. Tomando las fuerzas $\bar{F}_1=\left(-2\sqrt{3},2\right)\ [N]$ y la masa del bloque es $1{,}223\,[kg]$, calcula el valor de la fuerza en la cuerda 2.

Tomando la dirección de la aceleración debida a la gravedad como $\bar{g}=(0,-9{,}81)\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$, la combinación lineal se dará como

$$\begin{aligned}\bar{F}_1+\bar{F}_2+\bar{W} &= \bar{0}\\ \bar{F}_2=-\bar{F}_1-m\bar{g}\end{aligned}$$

donde $\bar{F}_2$ es una combinación lineal de $\bar{F}_1$ y $\bar{g}$.

$$\begin{aligned}\bar{F}_2 &= -\left(-2\sqrt{3},2\right)-1{,}223\,(0,-9{,}81)\\ &= \left(2\sqrt{3},-2+12\right)\Rightarrow\bar{F}_2=\left(2\sqrt{3},10\right)\ [N]\end{aligned}$$

que es el resultado buscado a partir combinaciones lineales.

2. Independencia Lineal

Un conjunto es linealmente independiente si no existen combinaciones lineales entre sus vectores; es decir, cada vector existe por sí mismo dentro del conjunto. En otra forma, si al combinar linealmente los elementos del conjunto en la forma

$$\alpha_1\bar{v}_1+\alpha_2\bar{v}_2+\alpha_3\bar{v}_3+\cdots+\alpha_n\bar{v}_n=\bar{0} \tag{1}$$

todos los escalares α_i son nulos, entonces el conjunto $\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3,\cdots,\bar{v}_n\}$ es linealmente independiente; en otro caso los vectores serán linealmente dependientes. La combinación lineal (1) se conoce como ecuación de dependencia lineal.

Ejemplo

Determina la independencia lineal de $A=\left\{3x^2+x+1,x+1,x^2-2x\right\}$ y $B=\left\{x^2+x+1,-2x^2+2,x^2+3x+5\right\}$.

Si al plantear la ecuación de dependencia lineal entre los elementos del conjunto se obtiene una solución trivial, el conjunto es independiente; en caso contrario será dependiente.

Conjunto A

$$\alpha_1\left(3x^2+x+1\right)+\alpha_2\left(x+1\right)+\alpha_3\left(x^2-2x\right)=0x^2+0x+0$$

El sistema de ecuaciones se obtiene por igualdad en polinomios:

$$\left(3\alpha_1+\alpha_3\right)x^2+\left(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3\right)x+\left(\alpha_1+\alpha_2\right)=0x^2+0x+0$$

$$\begin{array}{cccccl}3\alpha_1 & & +\alpha_3 & = & 0 & \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & -2\alpha_3 & = & 0 & \Rightarrow\alpha_1=0,\alpha_2=0\alpha_3=0\\ \alpha_1 & +\alpha_2 & & = & 0 & \end{array}$$

La única solución al sistema de ecuaciones es la trivial; por lo tanto, el conjunto es linealmente independiente.

Conjunto B

$$\alpha_1\left(x^2+x+1\right)+\alpha_2\left(-2x^2+2\right)+\alpha_3\left(x^2+3x+5\right)=0x^2+0x+0$$

Al plantear el sistema de ecuaciones

$$\left(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3\right)x^2+\left(\alpha_1+3\alpha_3\right)x+\left(\alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3\right)=0x^2+0x+0$$

$$\begin{array}{rrrcl}\alpha_1 & -2\alpha_2 & +\alpha_3 & = & 0\\ \alpha_1 & & +3\alpha_3 & = & 0\\ \alpha_1 & +2\alpha_2 & +5\alpha_3 & = & 0\end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrcl}\alpha_1 & -2\alpha_2 & +\alpha_3 & = & 0\\ & -2\alpha_2 & -2\alpha_3 & = & 0\\ & -4\alpha_2 & -4\alpha_3 & = & 0\end{array}$$

$$\therefore \alpha_1=-3\alpha_3, \alpha_2=-\alpha_3, \alpha_3\in\mathbb{R}$$

Al escalonar se llega al sistema compatible indeterminado; es decir, la solución trivial no es la única que satisface al sistema y en consecuencia el conjunto es linealmente dependiente. Puede observarse que

$$x^2+3x+5=3\left(x^2+x+1\right)+\left(-2x^2+2\right)$$

Es decir, el tercer polinomio es una combinación lineal de los dos primeros.

3. Conjunto Generador

Dado un conjunto A de vectores, se puede establecer una infinidad de combinaciones lineales entre sus elementos; cada combinación generará un vector que pertenezca a un espacio vectorial V específico. Es entonces, que al conjunto A se le conoce como generador del espacio V. Al aplicar la combinación lineal

$$\alpha_1\bar{v}_1+\alpha_2\bar{v}_2+\alpha_3\bar{v}_3+\cdots+\alpha_n\bar{v}_n=\bar{x}$$

el conjunto $\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3,\cdots,\bar{v}_n\}$ será generador si existen los escalares α_i que permitan obtener al vector genérico $\bar{x}$.

Ejemplo

Sea el conjunto $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\right\}$. Determina el espacio vectorial que genera.

Como el conjunto está formado por matrices, el vector genérico de la combinación lineal es una matriz de orden dos.

$$\alpha\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & 3\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha-2\gamma & \alpha-2\gamma\\ -2\alpha+3\beta+3\gamma & -\alpha+\text{‘}3\beta+\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones resultante

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & a\\ 1 & 0 & -2 & b\\ -2 & 3 & 3 & c\\ -1 & 3 & 1 & d\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & a\\ 0 & 0 & 0 & a-b\\ 0 & 3 & -1 & 2a+c\\ 0 & 3 & -1 & a+d\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & a\\ 0 & 0 & 0 & a-b\\ 0 & 3 & -1 & 2a+c\\ 0 & 0 & 0 & a+c-d\end{array}\right)$$

Se tienen dos ecuaciones degeneradas, las cuales servirán como restricción para determinar cuál es el espacio generado:

$$\begin{array}{rrrrcl}a & -b & & & = & 0\\ a & & +c & -d & = & 0\end{array} \therefore b=a, d=a+c$$

Finalmente, el espacio generado es

$$L\left(G\right)=\left\{\begin{pmatrix}a & a\\ c & a+c\end{pmatrix}|a,c\in\mathbb{R}\right\}$$

Es claro que no existen escalares suficientes para que G genere al espacio vectorial de matrices cuadradas de orden dos. Por lo tanto, se obtiene un subespacio con dos restricciones.