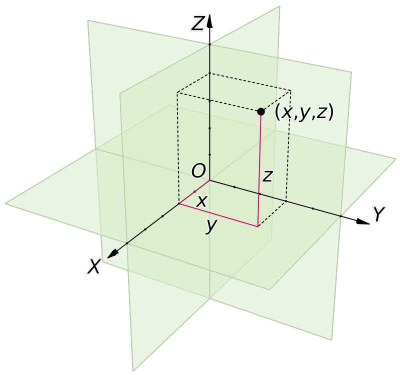
.

1. Base y Dimensión del Espacio Vectorial



Una base es un conjunto que genera a un espacio vectorial, cuya principal característica es la independencia lineal; es decir, una base es un conjunto generador linealmente independiente.

En un espacio vectorial todas sus bases tienen un número máximo n de vectores; dicho número n se conoce como la dimensión del espacio vectorial.

La base y la dimensión dotan al espacio vectorial con un sistema de referencia, en el cual puede ubicarse cada vector del espacio. Como la base no es única, puede definirse una infinidad de sistemas de referencia dentro del mismo espacio vectorial. Sin embargo, la dimensión siempre será la misma, pues todas las bases tienen el mismo número de vectores.

Ejemplo

Sea el espacio vectorial real $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$. De los siguientes conjuntos, determina cuál forma una base de A:

a. $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

b. $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Para que formen una base, ambos conjuntos deben ser generadores del espacio vectorial y linealmente independientes.

Para G_1

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 & +3\alpha_2 & = & a \\ 2\alpha_1 & +\alpha_2 & = & b \end{matrix}$$

Al resolver el sistema

$$\left(\begin{array}{cc:c} -1 & 3 & a \\ 2 & 1 & b \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 0 & 7 & 2a+b \\ 2 & 1 & b \end{array} \right)$$

se llega a una solución, lo cual indica que el conjunto es generador. La independencia lineal se verifica cuando $a = 0$ y $b = 0$ en el sistema de ecuaciones anterior:

$$\left(\begin{array}{cc:c} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 0 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$$

Por lo tanto, el conjunto es linealmente independiente. En conclusión, el conjunto G_1 es una base de A.

Para G_2

Debido a que G_1 tiene dos vectores, entonces todas las bases de A deben poseer únicamente dos vectores. Esto indica que el conjunto G_2 no es una base. Si se analiza cada uno de sus elementos, el tercer vector es una combinación lineal de los dos primeros:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Se hace evidente la dependencia lineal, y por lo tanto G_2 no es base.

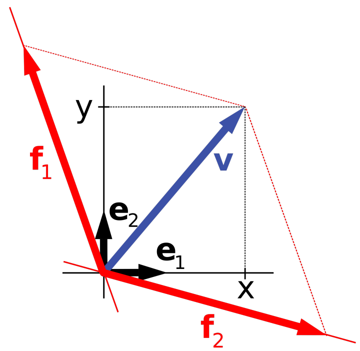
2. Vector de Coordenadas

Las coordenadas permiten la ubicación de un objeto en un sistema de referencia. Usualmente se utilizan sistemas cuyos ejes forman ángulos de 90° entre sí. Sin embargo, en muchas ocasiones los ejes no son perpendiculares, lo cual no evita que se pueda obtener la ubicación de un elemento en ese espacio.

Una base es un conjunto que puede generar cualquier vector del espacio vectorial; es decir, cualquier vector puede ubicarse en el espacio siempre y cuando esté referido a una base. Con la base $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ el vector $\bar{x}$ puede expresarse como

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{v}_n = \bar{x} \tag{1}$$

A los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ en (1) se les llama coordenadas de $\bar{x}$ en la base B (la ubicación del vector en el espacio vectorial, refiriéndose a la base dada). Si se establece un orden en las coordenadas, entonces se habla del vector de coordenadas de $\bar{x}$ referido a la base B:



$$[\bar{x}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Si una base A tiene los mismos elementos que una base B pero en diferente orden, entonces son bases diferentes y por lo tanto los vectores de coordenadas en sendas bases son diferentes

Ejemplo

Obtén el vector de coordenadas de $\bar{v} = (-6+i, 1-i, -4-3i)$ referido a la base $A = \{(1, i, 0), (3-i, 0, 2+i), (0, -i, -i)\}$.

Por combinación lineal

$$(-6+i, 1-i, -4-3i) = \alpha_1 (1, i, 0) + \alpha_2 (3-i, 0, 2+i) + \alpha_3 (0, -i, -i)$$

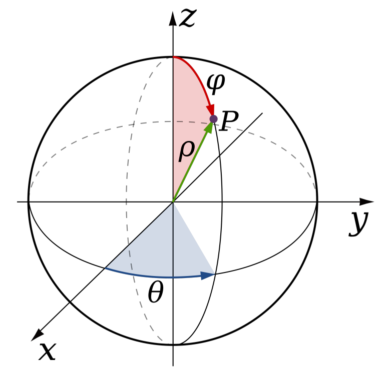
se produce el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rrrcr} \alpha_1 & +(3-i)\alpha_2 & & = & -6+i \\ i\alpha_1 & & -i\alpha_3 & = & 1-i \\ & (2+i)\alpha_2 & -i\alpha_3 & = & -4-3i \end{array}$$

que al resolverse arroja como solución $\alpha_1 = -i$, $\alpha_2 = -2$ y $\alpha_3 = 1$. El vector de coordenadas es $[\bar{v}]_A = \begin{bmatrix} -i \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Matriz de Transición

Al existir diferentes sistemas de coordenadas es útil conocer una forma para cambiar entre uno y otro. Como ya se mencionó, las coordenadas se refieren a una base; entonces, el cambio entre sistemas de referencia es equivalente al cambio entre bases de un espacio vectorial.



Dado el espacio vectorial V del cual dos de sus bases son $A = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \cdots, \bar{v}_n\}$ y $B = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \cdots, \bar{w}_n\}$, la forma de cambiar la referencia entre una y otra es mediante una matriz especial llamada matriz transición, formada a partir de vectores de coordenadas de la base A referidos en la base B:

$$M_B^A = \begin{pmatrix} [\bar{v}_1]_B & [\bar{v}_2]_B & \cdots & [\bar{v}_n]_B \end{pmatrix}$$

Esta es una matriz cuadrada cuyo orden lo establece la dimensión del espacio vectorial. Tiene dos propiedades importantes:

a. $M_B^A [\bar{x}]_A = [\bar{x}]_B$.
b. $M_A^B = \left(M_B^A\right)^{-1}$.

Ejemplo

Obtén la matriz de transición de la base $C = \left\{x^2, 2x^2+2x+3, 2x^2+x+2\right\}$ a la base $D = \left\{x^2+x+1, x^2+1, x+1\right\}$.

Como el sentido es de C a D, entonces cada elemento de C es combinación lineal de D:

$$\begin{aligned} x^2 &= \alpha_1 \left(x^2+x+1\right) + \alpha_2 \left(x^2+1\right) + \alpha_3 (x+1) \\ 2x^2+2x+3 &= \beta_1 \left(x^2+x+1\right) + \beta_2 \left(x^2+1\right) + \beta_3 (x+1) \\ 2x^2+x+2 &= \gamma_1 \left(x^2+x+1\right) + \gamma_2 \left(x^2+1\right) + \gamma_3 (x+1) \end{aligned}$$

Al resolver cada sistema de ecuaciones se obtiene

$$\left[x^2\right]_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \left[2x^2+2x+3\right]_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \left[2x^2+x+2\right]_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de transición es $M_D^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.