.

1. Espacio Renglón y Espacio Columna

Una matriz A por sí misma puede generar dos espacios vectoriales: el primero se forma por combinaciones lineales de los renglones, y el segundo al considerar en las combinaciones las columnas. Dichos espacios se conocen como espacio renglón

$$L_R(A) = \left\{ \bar{x} | \bar{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{r}_i \right\}$$

y espacio columna

$$L_C(A) = \left\{ \bar{y} | \bar{y} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \bar{c}_i \right\}$$

donde $A = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_n \end{bmatrix}$ o bien $A = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \cdots & \bar{c}_n \end{bmatrix}$. Ambos espacios vectoriales no son iguales. Sin embargo, su dimensión sí lo es.

Para obtener la dimensión del espacio renglón basta con escalonar la matriz hasta obtener el número de renglones linealmente independientes. Dicho número también es conocido como rango de la matriz A, denotado como $R(A) = \dim L_R(A) \Rightarrow \dim L_C(A)$.

Ejemplo

Los espacios renglón y columna de la matriz

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

se obtendrán al escalonarla tanto en forma original como transpuesta.

Espacio renglón

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El escalonamiento arrojó dos renglones independientes. Al combinarlos linealmente con escalares genéricos se obtendrá el espacio renglón de F.

$$a(1,0,0,1) + b(0,1,-1,0) = (a,b,-b,a) \therefore L_R(F) = \{(a,b,-b,a) | a,b \in \mathbb{R}\}$$

Espacio columna

En este caso, se necesita transponer la matriz para trabajar con sus columnas.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, con una combinación lineal

$$a\left(1,0,-\frac{3}{7}\right) + b\left(0,1,\frac{1}{7}\right) = \left(a,b,-\frac{3}{7}a + \frac{1}{7}b\right)$$

$$\therefore L_C(F) = \left\{ \left(a,b,-\frac{3}{7}a + \frac{1}{7}b\right) | a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

Los espacios son diferentes entre sí, pero ambos tienen dimensión 2.

$$\begin{aligned} \dim L_C(F) &= 2 \\ \dim L_R(F) &= \\ R(F) &= \end{aligned}$$

No es necesario llevar el escalonamiento de la matriz a la forma canónica escalonada, pero es buena práctica, ya que se obtendrá la base natural del espacio renglón o columna: la combinación lineal de los renglones (o columnas) será precisa y no tendrá ambigüedad en las restricciones del espacio vectorial.

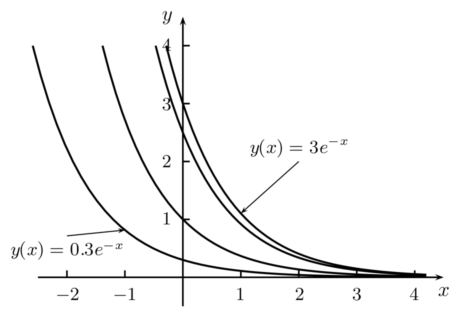
2. Espacio de Funciones

El conjunto F de las funciones reales de variable real forman un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, en virtud que sus dos operaciones

$$f(x) + g(x) = h_1(x) \in F$$

$$\alpha f(x) = h_2(x) \in F$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, cumplen con los diez axiomas de la definición de espacio vectorial. La gran diferencia entre los espacios estudiados y el espacio de funciones es que éste último tiene dimensión infinita. Para generar todo el espacio de funciones es necesaria una base con cada tipo de función existente, la cual contendrá una infinidad de elementos.



Sin embargo, es posible obtener subespacios de dimensión finita.

Ejemplo

Sea la ecuación diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2}y - \frac{d}{dx}y - 2y = 0$$

cuya solución general es $y = \alpha e^{-x} + \beta e^{2x}$.

Esta función es una combinación lineal del conjunto $S = \left\{e^{-x}, e^{2x}\right\}$, esto indica que existen escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ suficientes para generar cualquier función $y(x)$ que satisfaga la ecuación diferencial, incluida la función nula.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\left(\alpha e^{-x} + \beta e^{2x}\right) - \frac{d}{dx}\left(\alpha e^{-x} + \beta e^{2x}\right) - 2\left(\alpha e^{-x} + \beta e^{2x}\right) &= 0 \\
\left(\alpha e^{-x} + 4\beta e^{2x}\right) - \left(-\alpha e^{-x} + 2\beta e^{2x}\right) - 2\left(\alpha e^{-x} + \beta e^{2x}\right) &= 0 \\
2\alpha e^{-x} + 2\beta e^{2x} - 2\left(\alpha e^{-x} + \beta e^{2x}\right) &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Al presentarse la igualdad se concluye que los escalares toman cualquier valor real.

Dentro de las funciones también existen criterios para determinar la independencia lineal entre ellas. La más útil es por la ecuación de dependencia lineal con funciones:

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = 0$$

Otro criterio fue desarrollado por Józef Hoene-Wroński en 1812: el Wronskiano. Es un determinante formado por las funciones estudiadas y sus derivadas sucesivas:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

El uso del Wronskiano implica:

- independencia lineal, si $W(x) \neq 0$.
- dependencia lineal en algún punto del intervalo, si $W(x) = 0$.

Ejemplo

Sea el conjunto de funciones $F = \left\{4\sin^2 x, -3\cos^2 x, 12\right\}$. El conjunto es linealmente dependiente puesto que los escalares que satisfacen la ecuación de dependencia lineal no necesariamente son nulos:

$$\begin{aligned}
\alpha_1\left(4\sin^2 x\right) + \alpha_2\left(-3\cos^2 x\right) + \alpha_3(12) &= 0 \\
3\left(4\sin^2 x\right) + (-4)\left(-3\cos^2 x\right) + (-1)(12) &= 0 \\
12\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - 12 &= 0
\end{aligned}$$

Ejemplo

Sea el conjunto de funciones $G = \left\{e^{-x}, e^{2x}\right\}$. El conjunto es linealmente independiente puesto que el resultado del Wronskiano es diferente de cero.

$$\begin{aligned}
W(x) &= \begin{vmatrix} e^{-x} & e^2 x \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} \\
&= 2e^{2x-x} + e^{2x-x} \\
&= 3e^{x}
\end{aligned}$$

Al igualar el Wronskiano a cero

$$3e^{x} = 0 \Rightarrow x = \ln 0$$

que es un valor inexistente. Por lo tanto no hay valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que el Wronskiano es nulo. En conclusión, las funciones son linealmente independientes.

Dado un conjunto de funciones, también puede determinarse qué espacio se genera a partir de combinaciones lineales.

Ejemplo

Sea el conjunto $G = \left\{\log t^2, 3\log t, \log 3t\right\}$. El espacio que genera se obtiene mediante combinación lineal con una función desconocida hasta el momento.

$$\begin{aligned}
\alpha_1\left(\log t^2\right) + \alpha_2\left(3\log t\right) + \alpha_3\left(\log 3t\right) &= f(x) \\
\alpha_1\left(2\log t\right) + \alpha_2\left(3\log t\right) + \alpha_3\left(\log 3 + \log t\right) &= \\
\left(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3\right)\log t + \alpha_3 \log 3 &= \\
\log t^{2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3} + \log 3^{\alpha_3} &=
\end{aligned}$$

Si $2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = k_1$ y $3^{\alpha_3} = k_2$, entonces la función $f(x)$ es

$$\begin{aligned}
\log t^{k_1} + \log k_2 &= \\
\log k_2 t^{k_1} &= f(x)
\end{aligned}$$

Por lo que el espacio generado por G es

$$L(G) = \left\{\log k_2 t^{k_1} | k_1, k_2 \in \mathbb{R}\right\}$$