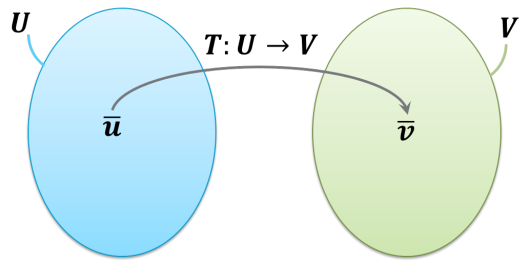
.

1. Transformación

Cuando un elemento de un espacio vectorial V se trabaja para convertirlo en un elemento de otro espacio vectorial W, el proceso se conoce como transformación, aplicación o función vectorial de variable vectorial.



Ejemplo

Una transformación en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ es

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow T(x, y, z) = (2x + 1, xy, z - 2)$$

Al aplicar la regla de correspondencia de la transformación a algún vector dado, se obtendrá

$$\begin{aligned} T(-2, 1, 1) &= (2(-2) + 1, (-2)(1), (1) - 2) \\ &= (-3, -2, -1) \end{aligned}$$

2. Transformación Lineal

Si una transformación conserva las operaciones fundamentales en el espacio vectorial (suma de vectores y multiplicación por un escalar) entonces, se vuelve caso de estudio en el Álgebra Lineal. Este tipo de transformaciones se conocen como transformaciones lineales, y cumplen con dos propiedades esenciales:

- $T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$ (Principio de superposición)
- $T(\alpha\bar{u}) = \alpha T(\bar{u})$ (Principio de homogeneidad)

donde $T : V \to W$, y el campo K de definición es el mismo en ambos espacios vectoriales. Obsérvese que se preservan las dos operaciones definidas dentro del espacio vectorial al aplicar la transformación lineal.

Ejemplo

Sea la transformación $F : \mathbb{R}^2 \to M_2 \Rightarrow F(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix}$, donde el espacio M_2 está conformado por matrices simétricas de orden dos con elementos reales. Para que F sea lineal, debe satisfacer la superposición y la homogeneidad:

Superposición

$$\begin{aligned} F((x, y) + (a, b)) &= F(x, y) + F(a, b) \\ F(x + a, y + b) &= \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x + a & y + b \\ y + b & -x - a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x + a & y + b \\ y + b & -x - a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Homogeneidad

$$\begin{aligned} F(\alpha(x, y)) &= \alpha F(x, y) \\ F(\alpha x, \alpha y) &= \alpha \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha y & -\alpha x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha y & -\alpha x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto F es una transformación lineal.

3. Dominio y Codominio

Como toda función, las transformaciones lineales poseen un dominio (el espacio vectorial que se está transformando) y un codomino (el espacio vectorial resultante de transformar al dominio). La única diferencia con las funciones tradicionales es que la transformación trabajará con vectores.

Ejemplo

En la transformación lineal F del ejemplo anterior, el dominio está representado por el espacio $\mathbb{R}^2$ (se transforman parejas ordenadas) y el codomio es el espacio M_2 (al transformar parejas ordenadas se obtienen matrices simétricas).