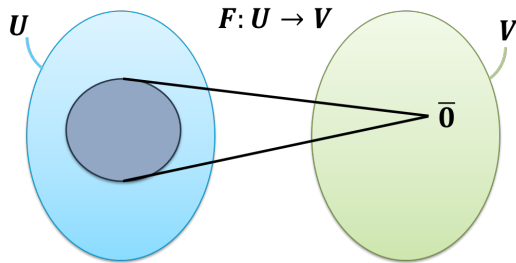


1. Los Subespacios Núcleo y Recorrido

Las transformaciones lineales tienen subespacios dentro del dominio y del codominio que permiten caracterizar la naturaleza de la transformación: el núcleo y el recorrido.

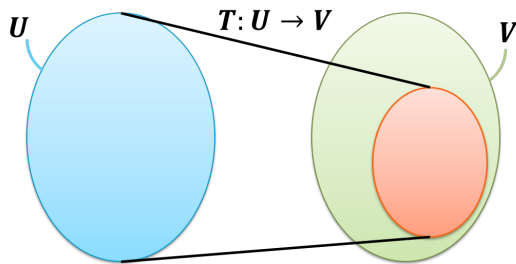
1.1. Núcleo de una Transformación



Sea $T : U \rightarrow V$ una transformación lineal. El núcleo es el subespacio que pertenece al dominio, y cuya imagen bajo T siempre será el vector nulo del codominio; es decir

$$N(T) = \{\bar{u} \in U | T(\bar{u}) = \bar{0}; \bar{0} \in V\}$$

1.2. Recorrido de una Transformación



Dentro de la misma transformación lineal $T : U \rightarrow V$ se define al recorrido como el subespacio que contiene a todo aquel vector del codominio que, bajo

T , es imagen de algún vector del dominio. En otras palabras

$$T(U) = \{\bar{v} \in V | T(\bar{u}) = \bar{v}; \bar{u} \in U\}$$

Ejemplo

Sean $M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y la transformación lineal

$$K : M_2 \rightarrow P_2 \Rightarrow K \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (2a - b)x^2 + (a + b + c)x + (3b + 2c)$$

Núcleo

De la definición de este subespacio se sabe que $K(\bar{v}) = \bar{0}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} K \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) &= \bar{0} \\ (2a - b)x^2 + (a + b + c)x + (3b + 2c) &= 0x^2 + 0x + 0 \end{aligned}$$

de donde se plantea el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2a - b &= 0 \\ a + b + c &= 0 \\ 3b + 2c &= 0 \end{aligned} \Rightarrow b = 2a, c = -3a$$

Estas serán las restricciones del núcleo, que pertenece al dominio.

$$\begin{aligned} N(K) &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid b = 2a, c = -3a; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a \\ -3a & d \end{bmatrix} \mid a, d \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Recorrido

Es necesario encontrar un conjunto generador del recorrido. Por las propiedades de la transformación lineal, dicho conjunto generador se obtiene a partir de una base del dominio.

Tomando la base natural $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ y

transformándola:

$$\begin{aligned} K \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) &= 2x^2 + x \\ K \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) &= -x^2 + x + 3 \\ K \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) &= x + 2 \\ K \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Al aplicar la reducción del conjunto generador

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, el recorrido es

$$\begin{aligned} a(x^2 - 1) + b(x + 2) &= ax^2 + bx + (-a + 2b) \\ K(M_2) &= \{ax^2 + bx - (a - 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

1.3. Teorema de Dimensiones

Existe una relación interesante entre las dimensiones de núcleo, el recorrido y el dominio de una transformación lineal; esta relación es fundamental en espacios de dimensión finita. En la transformación lineal $T : U \rightarrow V$ se establece que

$$\dim U = \dim T(U) + \dim N(T) \quad (1)$$

La expresión (1) se conoce como el teorema de dimensiones para una transformación lineal.

En ocasiones la dimensión del núcleo se llama nulidad y la del recorrido rango. El rango también puede obtenerse al reducir a su forma canónica escalonada a una matriz llamada matriz asociada a la transformación lineal.

2. Matriz Asociada a una Transformación Lineal

Sean $T : U \rightarrow V$ una transformación lineal, $A = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ una base de U , y $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_m\}$ una base de V . La matriz asociada a la transformación T referida a las bases A y B se forma con los vectores de coordenadas de las imágenes de A en la base B :

$$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} [T(\bar{a}_1)]_B & [T(\bar{a}_2)]_B & \cdots & [T(\bar{a}_n)]_B \end{bmatrix}$$

Esta matriz referida a esas bases es única para T , y permite establecer

$$[T(\bar{v})]_B = M_B^A(T) [\bar{v}]_A$$

Es un análogo a la matriz de transición; de hecho, la matriz de transición es una matriz asociada a una transformación.

Ejemplo

Sean las bases $A = \{(2, -1), (-1, 0)\}$ y $B = \{x + 1, x - 1\}$ y la transformación lineal

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_1 \Rightarrow F(a, b) = (a + b)x + (b - a)$$

La matriz asociada se forma por medio de las combinaciones lineales

$$\begin{aligned} F(2, -1) &= x - 3 \Rightarrow x - 3 = \alpha_1(x + 1) + \alpha_2(x - 1) \therefore \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2 \\ F(-1, 0) &= -x + 1 \Rightarrow -x + 1 = \beta_1(x + 1) + \beta_2(x - 1) \therefore \beta_1 = 0, \beta_2 = -1 \end{aligned}$$

$$M_B^A(F) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$