.

1. Álgebra de Transformaciones Lineales

Al ser funciones, las transformaciones lineales pueden operarse entre sí para formar nuevas transformaciones. La única limitante es la naturaleza del dominio y codominio, ya que si no hay compatibilidad la operación no podrá llevarse a cabo.

Suma de transformaciones

Se define a la suma de transformaciones lineales $F+G$ como la transformación denotada por

$$(F+G)(\bar{v}) = F(\bar{v}) + G(\bar{v})$$

Dos propiedades importantes de esta operación son:

- Si F y G son lineales, entonces $F+G$ es lineal.
- $M_B^A(F+G) = M_B^A(F) + M_B^A(G)$.

Multiplicación de una transformación por un escalar

Se define a la multiplicación de una transformación lineal por un escalar αF como la transformación denotada por

$$(\alpha F)(\bar{v}) = \alpha\left[F(\bar{v})\right]$$

Sus propiedades son:

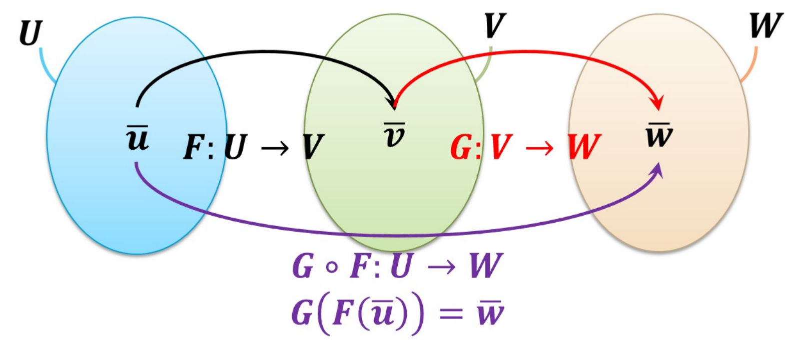
- Si F es lineal, entonces αF es lineal.
- $M_B^A(\alpha F) = \alpha M_B^A(F)$.

Composición de transformaciones

La transformación composición $G \circ F$ se define como

$$(G \circ F)(\bar{v}) = G(F(\bar{v}))$$

donde las transformaciones F y G deben ser compatibles entre sí para exista $G \circ F$: el dominio de G debe ser igual al codominio de F.



Las propiedades de la composición de funciones son:

- Si F y G son lineales, entonces $G \circ F$ también es lineal.
- $H \circ (F+G) = (H \circ F) + (H \circ G)$.
- $(H+E) \circ F = (H \circ F) + (E \circ F)$.
- $\alpha(H \circ F) = (\alpha H) \circ F \Rightarrow H \circ (\alpha F)$.
- $D \circ (H \circ F) = (D \circ H) \circ F$.
- $E \circ I_V = E$ y $I_W \circ E = E$.
- $M_C^A(G \circ F) = M_C^B(G)\, M_B^A(F)$.

Ejemplo

Sean las transformaciones lineales $P(a,b) = (-a, a+b)$, $Q(a,b) = (0,-b)$ y $R(a,b) = ax + (a+b)$. Al calcular $R \circ (2P - Q)$ se obtiene

$$\begin{aligned}(2P-Q)(a,b) &= 2(-a,a+b) - (0,-b) \\ &= (-2a, 2a+2b) + (0,b) \\ &= (-2a, 2a+3b)\end{aligned}$$

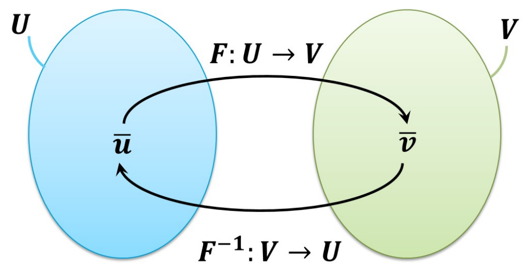
Entonces

$$\begin{aligned}R \circ (2P-Q)(a,b) &= R(-2a, 2a+3b) \\ &= (-2a)x + (-2a+2a+3b) \\ &= -2ax + 3b\end{aligned}$$

2. Inversa de una Transformación Lineal

Se llama inversa de $F : U \to V$ a la transformación $F^{-1} : V \to U$ tal que cumple

$$F^{-1} \circ F = I_U, \quad F \circ F^{-1} = I_V$$



Dentro de las propiedades de la transformación inversa se encuentran:

- Si F es lineal, entonces F^{-1} (si existe) también es lineal.
- F^{-1} existe, si $M_B^A(F)$ es no-singular.
- F^{-1} es única.
- $\left(F^{-1}\right)^{-1} = F$.
- $(T \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ T^{-1}$.
- $(\alpha F)^{-1} = \alpha^{-1} F^{-1}$; siendo $\alpha \neq 0 \in K$.
- $M_A^B\left(F^{-1}\right) = \left[M_B^A(F)\right]^{-1}$.

Ejemplo

Sea la transformación lineal $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow F(x, y, z) = (2x - y, z, -y + z)$. Determina su transformación inversa, si existe.

Tomando a

$$(2x - y, z, -y + z) = (a, b, c)$$

entonces

$$a = 2x - y, \quad b = z, \quad c = -y + z$$

de donde las variables x, y, z deben quedar en términos de a, b, c, resultando en

$$x = 1/2(a + b - c), \quad y = b - c, \quad z = b$$

Por lo tanto, la transformación inversa es

$$F^{-1}(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}(a + b - c), b - c, b\right)$$

La inversión de transformaciones permite fundamentar los espacio vectoriales isomorfos.

2.1. Isomorfismo entre espacios vectoriales

Una transformación lineal $T : V \to W$ que es inyectiva y suprayectiva se conoce como isomorfismo. Se le denota como Is, y los espacios vectoriales V y W son isomorfos entre sí; es decir $V \cong W$.

Para esta transformación se cumple que

- Su núcleo es el vector nulo: $N(Is) = \{\bar{0}\}$; es una transformación inyectiva
- Es no-singular; es decir, tiene una transformación inversa; es una transformación biyectiva.
- Una base cualquiera del dominio se transforma en una base del codominio; es una transformación suprayectiva.