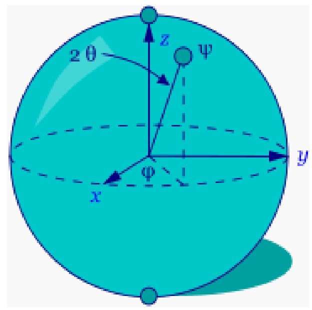
Producto Interno en un Espacio Vectorial

Una función $f: V \times V \to K$ es un producto interno (interior o escalar) en un espacio vectorial V sobre el campo K, si satisface las siguientes propiedades



- ✓ $\langle \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} | \bar{w} \rangle = \alpha\langle \bar{u}|\bar{w}\rangle + \beta\langle \bar{v}|\bar{w}\rangle$ (Linealidad)
- ✓ $\langle \bar{u}|\bar{v}\rangle = \langle \bar{v}|\bar{u}\rangle$ (Simetría)
- ✓ $\langle \bar{u}|\bar{u}\rangle > 0, \bar{u} \neq \bar{0}$ (Positividad)

El producto interno introduce los conceptos de magnitud, distancia y ángulo en un espacio vectorial. Los espacios vectoriales con estas propiedades se llaman espacios prehilbertianos.

EJEMPLO. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ el producto interno usual es el producto punto, sin embargo puede definirse otro producto como

$$\langle (a,b)|(x,y)\rangle = 2ax + 3by$$

Linealidad:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(a,b) + \beta(c,d)|(x,y)\rangle &= \alpha\langle (a,b)|(x,y)\rangle + \beta\langle (c,d)|(x,y)\rangle \\
\langle (\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d)|(x,y)\rangle &= \alpha(2ax + 3by) + \beta(2cx + 3dy) \\
2(\alpha a + \beta c)x + 3(\alpha b + \beta d)y &= \\
2\alpha ax + 2\beta cx + 3\alpha by + 3\beta dy &=
\end{aligned}$$

Simetría:

$$\begin{aligned}
\langle (a,b)|(x,y)\rangle &= \langle (x,y)|(a,b)\rangle \\
2ax + 3by &= 2xa + 3yb
\end{aligned}$$

Positividad:

$$\begin{aligned}
\langle (a,b)|(a,b)\rangle &> 0 \\
2a\cdot a + 3b\cdot b &> \\
2a^2 + 3b^2 &>
\end{aligned}$$

Las tres propiedades se cumplen, por lo tanto la función es un producto interno.

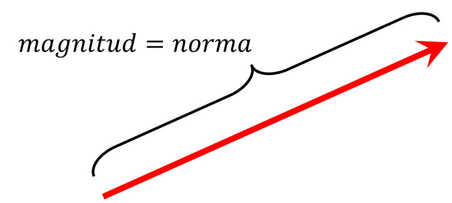
Las propiedades adicionales del producto interno son:

- ✓ $\langle \bar{u}|\bar{v}\rangle = \overline{\langle \bar{v}|\bar{u}\rangle}$, si los vectores pertenecen a un espacio vectorial sobre los complejos.
- ✓ $\langle \bar{u}|\alpha\bar{v}\rangle = \alpha\langle \bar{u}|\bar{v}\rangle$.
- ✓ $\langle \bar{u}|\alpha\bar{v}\rangle = \bar{\alpha}\langle \bar{u}|\bar{v}\rangle, si\ \alpha \in \mathbb{C}$.
- ✓ $\langle \bar{u}|\bar{0}\rangle = \langle \bar{0}|\bar{u}\rangle \Rightarrow 0$.
- ✓ $\langle \bar{0}|\bar{0}\rangle = 0$.

donde $\overline{\langle \bar{v}|\bar{u}\rangle}$ y $\bar{\alpha}$ denotan al conjugado del número correspondiente.

Norma de un Vector

La norma de un vector es su magnitud, y ésta puede obtenerse a partir de un producto interno. En un espacio vectorial V con producto interno $\langle \bar{u}|\bar{v}\rangle \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in V$, la norma de un vector se define como



$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\langle \bar{v}|\bar{v}\rangle}$$

Para un mismo vector se tendrá una norma diferente para cada producto interno definido.

EJEMPLO. La norma del vector $\bar{p} = -2x^2 + x - 1$ cambia según el producto interno que se utilice. Para el producto interno

$$\langle \bar{p}|\bar{q}\rangle = \sum_{i=0}^{2} p(i)q(i)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle \bar{p}|\bar{p}\rangle &= (-1)(-1) + (-2)(-2) + (-8+2-1)(-8+2-1) \\
&= 1 + 4 + 49 \Rightarrow \|\bar{p}\| = \sqrt{54}
\end{aligned}$$

Mientras tanto, con el producto interno

$$\langle \bar{p}|\bar{q}\rangle = \sum_{i=0}^{2} a_i b_i$$

$$\langle \bar{p}|\bar{p}\rangle = (-2)(-2) + (1)(1) + (-1)(-1)$$
$$= 4 + 1 + 1 \Rightarrow \|\bar{p}\| = \sqrt{6}$$

Y con el producto interno

$$\langle \bar{p}|\bar{q}\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}\langle \bar{p}|\bar{p}\rangle &= \int_0^1 (-2x^2 + x - 1)(-2x^2 + x - 1)\,dx \\ &= \int_0^1 (4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1)\,dx \\ &= \left[\frac{4}{5}x^5 - x^4 + \frac{5}{3}x^3 - x^2 + x\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{5} - 1 + \frac{5}{3} - 1 + 1 \Rightarrow \|\bar{p}\| = \sqrt{\frac{22}{15}}\end{aligned}$$

La norma posee las siguientes propiedades

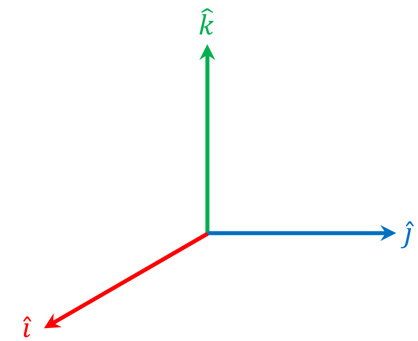
- ✓ $\|\bar{v}\| \geq 0$
- ✓ $\|\alpha\bar{v}\| = |\alpha|\|\bar{v}\|, \forall\ \alpha \in K$
- ✓ $\|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$

Vector Unitario

Los vectores unitarios involucran a un vector y su norma. Estos vectores permiten establecer los sistemas de referencia de una manera más sencilla. Un vector unitario es aquel que cumple con la ecuación $\|\bar{v}\| = 1$; es decir, su magnitud es igual a uno. Para encontrar un vector unitario simplemente se divide cualquier vector entre su norma.

$$\bar{v} = \frac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v}$$

Cuando se obtiene un vector unitario a partir de un vector $\bar{v}$ cualquiera, se dice que $\bar{v}$ fue normalizado.



EJEMPLO. Bajo el producto interno

$$\operatorname{tr}(A^T B) = \langle A|B\rangle$$

El vector unitario de $\bar{m} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ será

$$\left\langle \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 4+9 & -8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$= 25 + 16 \Rightarrow \|\bar{m}\| = \sqrt{41} \therefore \hat{m} = \frac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$