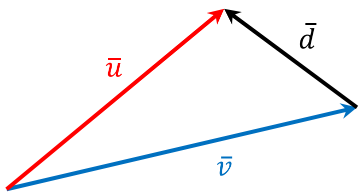
Distancia entre Vectores y sus Propiedades

La distancia entre dos vectores se calcula como



$$\|\bar{d}\| = \|\bar{v} - \bar{u}\|$$
$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\bar{v} - \bar{u}\|$$

Este número es un real positivo, que establece los principios de métrica en un espacio vectorial. Satisface:

- ✓ $d(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0$.
- ✓ $d(\bar{u}, \bar{v}) = 0$, si $\bar{u} = \bar{v}$.
- ✓ $d(\bar{u}, \bar{v}) = d(\bar{v}, \bar{u})$.
- ✓ $d(\bar{u}, \bar{w}) \leq d(\bar{u}, \bar{v}) + d(\bar{v}, \bar{w})$, llamada desigualdad del triángulo.

EJEMPLO. Bajo el producto interno

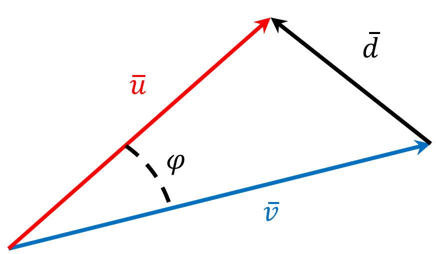
$$\langle (x, y) | (a, b) \rangle = 2xa - xb - ya + yb$$

La distancia entre los vectores $\bar{u} = (-1, 2)$ y $\bar{v} = (2, 0)$ se calcula como

$$\begin{aligned} d(\bar{u}, \bar{v}) &= \langle \bar{u} - \bar{v} | \bar{u} - \bar{v} \rangle \\ &= \langle (-3, 2) | (-3, 2) \rangle \\ &= 2(-3)(-3) - (-3)(2) - (2)(-3) + (2)(2) \\ &= 18 + 6 + 6 + 4 \Rightarrow d(\bar{u}, \bar{v}) = \sqrt{34}\ [u] \end{aligned}$$

La distancia al ser una norma, cambia según el producto interno utilizado.

Definición de Ángulo entre Vectores



El cálculo del ángulo entre vectores se realiza mediante una simplificación y posterior generalización de la ley del coseno en términos de normas y propiedades del producto interno:

$$\frac{\langle \bar{u} | \bar{v} \rangle}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|} = \cos \varphi$$

En espacios complejos sólo se tomará en cuenta la parte real:

$$Re \left\{ \frac{\langle \bar{u} | \bar{v} \rangle}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|} \right\} = \cos \varphi$$

EJEMPLO. Bajo el producto interno usual, el ángulo entre los vectores $\bar{v} = \left(-\sqrt{3}, 1\right)$ y $\bar{w} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ es

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \left(-\sqrt{3}, 1\right) \cdot \frac{\sqrt{2}, \sqrt{2}}{\|\bar{v}\| \|\bar{w}\|} \\ &= \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2 \cdot 2} \\ \varphi &= \arccos \left(\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right) \Rightarrow 105° \end{aligned}$$

VECTORES ORTOGONALES

Se dice que dos vectores $\bar{u}, \bar{v} \in V$ son ortogonales si $\langle \bar{u} | \bar{v} \rangle = 0$, ya que $\cos 90° = 0$.

Conjuntos Ortogonales y Ortonormales

La ortogonalidad no es específica de un par de vectores; se pueden tener conjuntos completos de vectores ortogonales a un vector, o incluso conjuntos de vectores ortogonales entre sí. La única restricción que deben cumplir estos vectores es

$$\langle \bar{u}_i | \bar{v}_j \rangle = 0, \forall\ i \neq j$$

Los conjuntos ortonormales son conjuntos ortogonales con vectores normalizados.

EJEMPLO. Obtén un conjunto ortogonal del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$.

Para encontrar este conjunto se debe partir de un vector dado o propuesto. Puesto que $\mathbb{R}^4 = \{(w, x, y, z) | w, x, y, z \in \mathbb{R}\}$, se partirá de un vector arbitrario: $\bar{v}_1 = (1, 0, 1, 0)$. A partir de este vector se aplicará sucesivamente la condición de ortogonalidad con un vector genérico $\bar{v} = (w, x, y, z)$.

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 \cdot \bar{v} &= 0 \\ (1,0,1,0) \cdot (w,x,y,z) &= \\ w + y = 0 \therefore w = -y &\Rightarrow \bar{v} = (-y, x, y, z) \end{aligned}$$

Dando los valores aleatorios $x = 1, y = 1, z = 0$, el vector obtenido es $\bar{v}_2 = (-1,1,1,0)$. Para obtener el siguiente vector, se repite el proceso utilizando conjuntamente a $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$.

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 \cdot \bar{v} &= 0 \therefore w = -y \dots (1) \\ \bar{v}_2 \cdot \bar{v} &= 0 \\ (-1,1,1,0) \cdot (w,x,y,z) &= \\ -w + x + y &= 0 \therefore w = x + y \dots (2) \end{aligned}$$

Sustituyendo (1) en (2):

$$\begin{aligned} w &= x + y \\ -y &= x + y \Rightarrow x = -2y \therefore \bar{v} = (-y, -2y, y, z) \end{aligned}$$

Con los valores $y = 1, z = 0$, el vector obtenido es $\bar{v}_3 = (-1,-2,1,0)$. Para el cuarto vector

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 \cdot \bar{v} &= 0 \therefore w = -y \dots (1) \\ \bar{v}_2 \cdot \bar{v} &= 0 \therefore w = x + y \dots (2) \\ \bar{v}_3 \cdot \bar{v} &= 0 \\ (-1,-2,1,0) \cdot (w,x,y,z) &= \\ -w - 2x + y &= 0 \therefore w = -2x + y \dots (3) \end{aligned}$$

Restando (2) menos (3):

$$\begin{aligned} w - w &= (x + y) - (-2x + y) \\ 0 &= 3x \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 0$ en (2) y sumando con (1)

$$\begin{aligned} w + w &= (x + y) - y \\ 2w &= 0 \Rightarrow w = 0 \therefore y = 0 \end{aligned}$$

El último vector tendrá la forma $\bar{v} = (0,0,0,z)$, y tomando $z = 1$ se obtendrá el vector $\bar{v}_4 = (0,0,0,1)$. Se observa que conforme se obtienen vectores ortogonales el sistema de ecuaciones resultante de la condición de ortogonalidad tiende a la solución trivial; entonces, el siguiente vector ortogonal será el vector nulo. Finalmente, el conjunto ortogonal pedido es

$$B = \{(1,0,1,0), (-1,1,1,0), (-1,-2,1,0), (0,0,0,1)\}$$

Un conjunto ortogonal es linealmente independiente; si es base entonces cada coordenada de un vector $\bar{u}$ referida a la base ortogonal se calcula con el producto interno como

$$\frac{\langle \bar{u} | \bar{b}_i \rangle}{\langle \bar{b}_i | \bar{b}_i \rangle} = \alpha_i$$