Tipos Especiales de Operadores

Si la matriz asociada a un operador lineal, referida a una base ortonormal, es

- ✓ simétrica, el operador lineal será simétrico.
- ✓ antisimétrica, el operador lineal será antisimétrico.
- ✓ hermítica. el operador será hermítico.
- ✓ antihermítica. el operador será antihermítico.
- ✓ ortogonal. el operador será ortogonal.
- ✓ unitaria. el operador será unitario.

Los operadores simétricos y hermíticos también son autoadjuntos: $T(\bar{v}) = T^*(\bar{v})$.

Todos estos tipos especiales de operadores son normales. Cabe recordar que esta naturaleza está condicionada al producto interno utilizado.

Los operadores ortogonal y unitario presentan la propiedad $T \circ T^* = T^* \circ T \;\Rightarrow\; I$; entonces $T^* = T^{-1}$. La diferencia entre uno y otro es el campo de definición: el operador es unitario sobre el campo $\mathbb{C}$; para el operador ortogonal el campo de definición es $\mathbb{R}$.

Dos características importantes de los operadores unitario y ortogonal se presenta en los renglones de las matrices asociadas: tomándolos como vectores, forman una base ortonormal.

EJEMPLO. Bajo el producto interno usual en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, el operador lineal $G(x, y, z) = \frac{1}{5}(-3x + 4y, 4x + 3y, 5z)$ es ortogonal y simétrico puesto que para la base ortonormal $B = \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ su matriz asociada y la de su adjunto son

$$M_B^B(G) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow M_B^B(G^*) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Se obtiene la misma matriz, pues el operador es autoadjunto (simétrico).

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9+16 & -12+12 & 0 \\ -12+12 & 16+9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

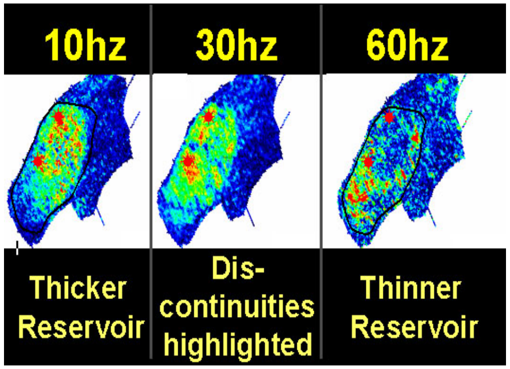
$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \Rightarrow I$$

Nótese que existe ortogonalidad entre cada renglón de la matriz asociada, y cada renglón se encuentra normalizado.

Para un operador unitario, los renglones siguen formando una base ortonormal. Debe recalcarse que los vectores serán ortogonales, si la parte real del producto interno entre ellos es nula.

Teorema Espectral

En el espacio vectorial V con producto interno $\langle \bar{u} | \bar{v} \rangle, \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in V$, el operador lineal $F: V \to V$ tiene una matriz asociada diagonal respecto a una base ortonormal, si F es autoadjunto.



Se denomina teorema espectral puesto que F puede descomponerse en operadores (llamados espectros) asociados a cada uno de los vectores propios.

- ✓ $F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \cdots + \lambda_n F_n$ (descomposición espectral).
- ✓ $I = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n$.
- ✓ $\langle F_i | F_j \rangle = 0, \forall\, i \neq j$.

donde el operador F_i es la proyección ortogonal del vector genérico $\bar{v} \in V$ sobre el espacio característico $E(\lambda_i)$.

EJEMPLO. Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

su descomposición espectral puede darse por medio de operadores lineales o por matrices.

$$\begin{aligned}|A-\lambda I| &= (1-\lambda)[(1-\lambda)^2-(-i^2)]\\ &= (1-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-1)\\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda)\\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)\lambda\end{aligned}$$

Cada espacio propio será entonces

$$E(0)=\{(x,-ix,0)|x\in\mathbb{C}\}$$

$$E(1)=\{(0,0,z)|z\in\mathbb{C}\}$$

$$E(2)=\{(-iy,y,0)|y\in\mathbb{C}\}$$

y al realizar las respectivas proyecciones sobre una base ortogonal de cada espacio propio:

$$\begin{aligned}\mathrm{Proy}_{E(0)}(x,y,z) &= \frac{(x,y,z)\cdot(1,-i,0)}{(1,-i,0)\cdot(1,-i,0)}(1,-i,0)\Rightarrow\frac{1}{2}(x+iy,-ix+y,0)\\ \mathrm{Proy}_{E(1)}(x,y,z) &= \frac{(x,y,z)\cdot(0,0,1)}{(0,0,1)\cdot(0,0,1)}(0,0,1)\Rightarrow(0,0,z)\\ \mathrm{Proy}_{E(2)}(x,y,z) &= \frac{(x,y,z)\cdot(-i,1,0)}{(-i,1,0)\cdot(-i,1,0)}(-i,1,0)\Rightarrow\frac{1}{2}(x-iy,ix+y,0)\end{aligned}$$

Cada proyección es un operador lineal; por lo tanto, tiene una matriz asociada, que junto con cada valor propio asociado formará la descomposición espectral de la matriz A original.

Por lo tanto, la descomposición espectral es

$$A(x,y,z)=(0)\left[\frac{1}{2}(x+iy,-ix+y,0)\right]+(1)[(0,0,z)]+(2)\left[\frac{1}{2}(x-iy,ix+y,0)\right]$$

o bien

$$\begin{pmatrix}1&-i&0\\i&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(0)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&i&0\\-i&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+(1)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+(2)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-i&0\\i&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$