Formas Cuadráticas

Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ es una expresión con n variables, coeficientes reales, de segundo grado y donde todos sus términos tienen el mismo grado. Con esta definición, una forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ tiene la forma

$$f(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$$

Si se toma en cuenta la ecuación general de segundo, se observará que al suprimir los términos lineales y el término independiente, se tiene una cuadrática.

Dados $\bar{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y el producto interno $\langle \bar{u}|\bar{v}\rangle = \bar{u}A\bar{v}^T$, donde A es una matriz simétrica de orden tres, al desarrollar la positividad se obtiene

$$\begin{aligned}(x,y,z)\begin{pmatrix} A & d & e \\ d & B & f \\ e & f & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} &= (Ax+dy+ez, dx+By+fz, ex+fy+Cz)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} \\ &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz \\ &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz\end{aligned}$$

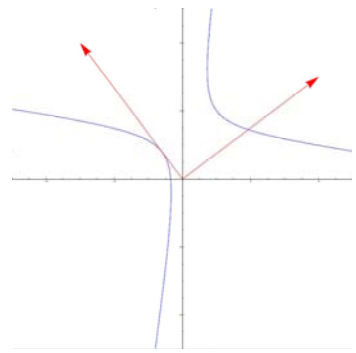
Entonces, una cuadrática siempre tendrá una representación matricial, con base en un producto interno y una matriz simétrica. Los coeficientes con términos mixtos son los valores de los triángulos de la matriz multiplicados por dos, y los coeficientes cuadráticos puros son los elementos de la diagonal principal.

Valores y vectores propios en las formas cuadráticas

La ecuación general de segundo para el espacio $\mathbb{R}^3$ en forma matricial será:

$$\begin{gathered}Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyx + Gx + Hy + Iz + J = 0 \\ (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} A & d & e \\ d & B & f \\ e & f & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} + (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} G \\ H \\ I\end{pmatrix} + J =\end{gathered}$$

Entonces, debido a que las ecuaciones de segundo grado representan los lugares geométricos, entonces es posible obtener una representación matricial de dichos lugares (ya sean curvas o superficies). La gran utilidad de esta representación es la rotación de ejes coordenados.



Se sabe que una curva (o superficie) de segundo grado con términos mixtos se encuentra en una posición oblicua a los ejes coordenados. Esto hace muy difícil su identificación, y es necesario rotar el sistema coordenado para analizar el lugar geométrico.

Ejemplo. Para caracterizar la curva cuya ecuación es

$$C:\ 7x^2 + 48xy - 7y^2 - 70x + 10y - 25 = 0$$

se necesitan sus vectores propios, ya que éstos determinan el sistema de coordenadas donde la curva no contiene términos cruzados.

Convirtiendo la curva en su ecuación matricial

$$\begin{gathered}7x^2 + 48xy - 7y^2 - 70x + 10y - 25 = 0 \\ (x \quad y)\begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} + (x \quad y)\begin{pmatrix} -70 \\ 10\end{pmatrix} - 25 =\end{gathered}$$

La matriz que representa la curva proporciona los vectores propios necesitados.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 7-\lambda & 24 \\ 24 & -7-\lambda\end{vmatrix} &= 0 \\ &= -(7+\lambda)(7-\lambda) - (24^2) \\ &= -(49-\lambda^2) - 576 \\ &= \lambda^2 - 625 \Rightarrow \lambda_1 = 25, \lambda_2 = -25\end{aligned}$$

Para $\lambda = 25$

$$\begin{pmatrix} -18 & 24 \\ 24 & -32\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} \therefore 3x - 4y = 0 \Rightarrow E(25) = \left\{\left(x, \frac{3}{4}x\right) \middle| x \in \mathbb{R}\right\}$$

Para $\lambda = -25$

$$\begin{pmatrix} 32 & 24 \\ 24 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} \therefore 4x + 3y = 0 \Rightarrow E(-25) = \left\{\left(-\frac{3}{4}y, y\right) \middle| y \in \mathbb{R}\right\}$$

donde se obtiene la base ortonormal

$$B = \left\{ \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right), \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \right\}$$

la cual es análoga a la base canónica como generadora de un sistema de coordenadas, pero rotado $45°$ en sentido antihorario.

Puesto que los términos cruzados de la ecuación se asocian a los elementos de los triángulos superior e inferior de la matriz, es necesario hacer una diagonalización para que la curva sea caracterizada.

$$\begin{aligned}(x \quad y)\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \\ (x \quad y)\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 100 & 75 \\ 75 & -100 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \\ (x \quad y)\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & -625 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (x \quad y)\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Para la sección lineal de la ecuación, es necesario considerar un cambio de coordenadas puesto que se desea cambiar del sistema canónico (donde la curva es oblicua a los ejes) al sistema rotado. El cambio entre bases se logra con una matriz de transición.

$$(1,0) = \alpha_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) + \alpha_2\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{4}{5}, \alpha_2 = -\frac{3}{5}$$

$$(0,1) = \beta_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) + \beta_2\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \Rightarrow \beta_1 = \frac{3}{5}, \beta_2 = \frac{4}{5}$$

$$\therefore M_D^C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

que es la matriz inversa de la matriz diagonalizadora. Por lo que

$$\begin{aligned}(x \quad y)\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -70 \\ 10 \end{pmatrix} &= (x \quad y)\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -14 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (x \quad y)\begin{pmatrix} -50 \\ 50 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación de la curva sin términos cruzados es

$$\begin{aligned}(x \quad y)\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x \quad y)\begin{pmatrix} -50 \\ 50 \end{pmatrix} - 25 &= 0 \\ (25x \quad -25y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 50x + 50y - 25 &= \\ 25x^2 - 25y^2 - 50x + 50y - 25 &= \\ x^2 - y^2 - 2x + 2y - 1 &= \\ (x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 2y + 1) &= 1 \\ (x-1)^2 - (y-1)^2 &= 1\end{aligned}$$

La curva es una hipérbola con centro en $C(1,1)$ y cuyos ejes transversal y conjugado tienen un valor de 1.