Espacios Vectoriales

Espacio vectorial

En Matemática, los conjuntos tienen un particular interés debido a la naturaleza o a la aplicación que se les da. Estas dos características están presentes en un tipo especial de conjunto utilizado para representar cantidades físicas con magnitud, dirección y sentido, y es conocido como espacio vectorial. A los elementos pertenecientes al espacio vectorial se les conoce como vectores.

De manera básica existen tres definiciones para un vector, todas encaminadas en un ámbito diferente. Así, el término físico es una cantidad con magnitud, dirección y sentido; en Geometría, el vector es un elemento director de un lugar geométrico en el plano o el espacio; finalmente, en Álgebra, el vector es un elemento sobre el cual pueden aplicarse las operaciones de suma y multiplicación por un escalar. Este último punto de vista será el abordado de ahora en adelante: el vector como elemento de un conjunto donde se definen dos operaciones.

Sean K un campo, y V un conjunto no vacío en los cuales se definen las operaciones

- ✓ $f(V,V) = \bar{u} + \bar{v}, \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in V$ (suma de vectores)
- ✓ $f(K,V) = \alpha\bar{u}, \forall\, \bar{u} \in V, \alpha \in K$ (multiplicación de un vector por un escalar)

El conjunto V es un espacio vectorial sobre el campo K, si para todo vector $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ y para todo escalar $\alpha, \beta \in K$ se cumple que

1. $\bar{u} + \bar{v} \in V$
2. $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$
3. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
4. $\bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$, donde $\bar{0}$ es el elemento neutro aditivo (vector nulo)
5. $\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$, donde $-\bar{u}$ es el inverso aditivo de $\bar{u}$
6. $\alpha\bar{u} \in V$
7. $(\alpha\beta)\bar{u} = \alpha(\beta\bar{u})$
8. $(\alpha + \beta)\bar{u} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{u}$
9. $\alpha(\bar{u} + \bar{v}) = \alpha\bar{u} + \alpha\bar{v}$
10. $(1)\bar{u} = \bar{u}$, donde 1 es la unidad del campo K

Los diez axiomas anteriores establecen la estructura algebraica de espacio vectorial, y pueden aplicarse a cualquier conjunto sobre cualquier campo, siempre y cuando se cumplan.

EJEMPLO 2.1. Algunos conjuntos trascendentes son espacios vectoriales sobre el campo real, complejo o incluso sobre ambos:

- ✓ Las matrices de orden $m \times n$.
- ✓ Los números complejos, y sus variantes $\mathbb{C}^n$.
- ✓ Los números reales, y sus variantes $\mathbb{R}^n$ (sólo campo real).
- ✓ Los polinomios de grado menor o igual a n.

Dentro de los conjuntos de elementos matemáticos más comunes pueden definirse operaciones de suma y multiplicación por un escalar diferentes a las tradicionales. Dichas operaciones modificadas también son válidas para verificar la estructura de espacio vectorial.

EJEMPLO 2.2. Sean el campo de los números reales y el conjunto $T = \{x | x > 0, x \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas como

$$x + y = xy, \qquad \forall\, x, y \in T$$

$$\alpha x = x^{\alpha}, \qquad \forall\, x \in T, \alpha \in \mathbb{R}$$

Determina si dicho conjunto es un espacio vectorial.

Es sencillo comprobar cada uno de los axiomas, desarrollando cada uno y concluyendo si se llega o no a una igualdad.

Axioma 1. La multiplicación en los números reales positivos es cerrada, pues $x, y \in \mathbb{R}^{+}$ y por la primera regla de los signos $xy \in \mathbb{R}^{+}$.

Axioma 2.

$$\begin{gathered}(x + y) + z = x + (y + z)\\ xy + z = x + yz\\ xyz = xyz\end{gathered}$$

Axioma 3.

$$\begin{gathered}x + y = y + x\\ xy = yx\end{gathered}$$

Axioma 4.

$$\begin{aligned}x + e &= x\\ xe &= x \Rightarrow \exists\, e = 1\end{aligned}$$

Es importante resaltar que el elemento neutro o vector nulo no siempre es cero; de manera general se denota como $\bar{0}$, pero no quiere decir que será, como tal, un elemento con ceros.

Axioma 5.

$$\begin{aligned}x + (-x) &= 1\\ x - x &= 1\\ x(x^{-1}) &= 1 \Rightarrow \exists\, x^{-1} = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

El conjunto T no contiene al cero; todos los elementos tienen inverso.

Axioma 6. Un número real positivo elevado a cualquier potencia siempre es positivo. Por lo que $x^{\alpha} \in T$.

Axioma 7.

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

$$\begin{aligned} x^{\alpha\beta} &= \alpha\left(x^{\beta}\right) \\ &= \left(x^{\beta}\right)^{\alpha} \\ &= x^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Axioma 8.

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)x &= \alpha x + \beta x \\ x^{\alpha+\beta} &= x^{\alpha} + x^{\beta} \\ &= x^{\alpha}x^{\beta} \\ &= x^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

Axioma 9.

$$\begin{aligned} \alpha(x+y) &= \alpha x + \alpha y \\ (x+y)^{\alpha} &= x^{\alpha} + y^{\alpha} \\ (xy)^{\alpha} &= x^{\alpha}y^{\alpha} \\ &= (xy)^{\alpha} \end{aligned}$$

Axioma 10.

$$\begin{aligned} (1)x &= x \\ x^{1} &= x \end{aligned}$$

Todos los axiomas se comprueban para el conjunto T con las operaciones definidas; entonces, T es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales.

Un subconjunto específico de un conjunto de entes matemáticos comunes también puede ser espacio vectorial, si tiene definidas las operaciones de suma y multiplicación por un escalar y cumple con los diez axiomas.

EJEMPLO 2.3. Sean el campo de los números complejos y el conjunto

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a + d = 1; a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

Determínese si W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con las operaciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales.

Antes de comenzar, se observa que existe una condición que cada vector del conjunto debe cumplir. Por lo tanto, es preferible sustituir esta condición en el vector genérico, y después comenzar con la comprobación de los axiomas. El conjunto reescrito es

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} \middle| a, b, c, \in \mathbb{C} \right\}$$

Axioma 1. Dados los vectores $\bar{m} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}, \bar{n} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 1-x \end{pmatrix} \in W$ se debe cumplir que $\bar{m} + \bar{n} \in W$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & 2-a-x \end{pmatrix}$$

Al realizar el cambio de variable $a + x = p,\ b + y = q$ y $c + z = r$ el vector suma es

$$\bar{m}+\bar{n}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & 2-p \end{pmatrix}$$

Como el resultado presenta una forma diferente a la especificada en el conjunto, no se cumple el primer axioma del espacio vectorial. Por lo tanto, el conjunto W no es un espacio vectorial sobre el campo de los complejos.

Propiedades elementales de los espacios vectoriales

Al igual que los conjuntos numéricos ordinarios donde se definen operaciones binarias, la estructura del espacio vectorial posee propiedades que permiten establecer procedimientos algebraicos para plantear ecuaciones. Para el espacio vectorial V sobre campo K, donde $\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{0}\in V$ y $\alpha,\beta,0\in K$, se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} \checkmark\quad \bar{u}+\bar{v}=\bar{w}+\bar{v}\Rightarrow\bar{u}=\bar{w} \\ \checkmark\quad \alpha\bar{u}=\beta\bar{u}\Rightarrow\alpha=\beta \\ \checkmark\quad \alpha\bar{u}=\alpha\bar{v}\Rightarrow\bar{u}=\bar{v} \end{array}\right\}\ \text{cancelaciones}$$

$$\left.\begin{array}{l} \checkmark\quad (0)\bar{u}=\bar{0} \\ \checkmark\quad \alpha\bar{0}=\bar{0} \\ \checkmark\quad \text{Si } \alpha\bar{u}=\bar{0}, \text{ entonces } \alpha=0 \text{ ó } \bar{u}=\bar{0} \end{array}\right\}\ \text{vector nulo}$$

- ✓ $(-\alpha)\bar{u}=-(\alpha\bar{u})\Rightarrow-\alpha\bar{u}=\alpha(-\bar{u})$ homogeneidad del signo negativo

Estas propiedades son válidas únicamente sobre las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en las estructura de espacio vectorial.

Subespacios

En el ejemplo 1.3 se analizó un subconjunto del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos con elementos complejos. En general, un espacio vectorial puede tener una infinidad de subconjuntos, los cuales pueden o no ser espacios vectoriales por sí mismos; para que se cumpla esta naturaleza es necesario que el subconjunto cumpla con los diez axiomas del espacio vectorial. Este concepto se llama subespacio vectorial.

> Sea H un subconjunto de un espacio vectorial V sobre un campo K. H es un subespacio vectorial de V, si H es un espacio vectorial sobre el campo K con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en V.

El concepto especifica que el subespacio tiene todas las propiedades algebraicas del espacio vectorial; esto quiere decir que no es necesario probar todos los diez axiomas requeridos para el espacio vectorial, ya que las propiedades son heredadas del espacio padre al subespacio hijo. Un subconjunto H es un subespacio vectorial de V sobre el campo K, donde $\bar{u},\bar{v}\in H$ y $\alpha\in K$, si cumple

- ✓ $\bar{u}+\bar{v}\in H$
- ✓ $\alpha\bar{u}\in H$
- ✓ $\bar{0}\in H$

Con las operaciones cerradas se asegura que las demás propiedades se cumplen; con el vector nulo perteneciente al subespacio se asegura el cumplimiento del axioma 4 y las propiedades algebraicas del espacio vectorial.

EJEMPLO 2.4. Verifíquese si el conjunto

$$W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & ab \end{pmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

es un subespacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos con elementos reales.

Vector nulo. Si $a = 0$ y $b = 0$, se tiene la matriz nula

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{0}$$

Por lo que se cumple la condición necesaria, pero no suficiente.

Cerradura de la suma de vectores.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & ab \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ -y & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ -b-y & ab+xy \end{pmatrix}$$

El subespacio indica que el elemento w_{22} es la multiplicación de los elementos w_{11} y w_{12} dentro de la matriz $\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \in W$; por lo tanto, en el resultado de la suma se debe tener

$$\begin{aligned}(a+x)(b+y) &= ab + xb + ay + xy \\ &\neq ab + xy\end{aligned}$$

Lo cual no es cierto, debido a la definición del subconjunto. Por lo tanto, no se cumple la cerradura de la suma de vectores, y en consecuencia W no es un subespacio vectorial.

EJEMPLO 2.5. Sea el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a uno con coeficientes complejos sobre el campo de los reales, y el subconjunto

$$H = \{ax + \bar{a} | a \in \mathbb{C}\}$$

donde $\bar{a}$ es el conjugado de a. ¿Es H un subespacio vectorial?

Vector nulo. Si $a = 0$, entonces $\bar{a} = 0$, y se tiene

$$\bar{0} = 0x + 0$$

Por lo cual se cumple la propiedad.

Cerradura para la suma de vectores.

$$(ax + \bar{a}) + (bx + \bar{b}) = (a+b)x + (\bar{a} + \bar{b})$$

Por propiedades del conjugado de un número complejo $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$, y entonces por el cambio de variable $a + b = c$

$$\begin{aligned}(ax + \bar{a}) + (bx + \bar{b}) &= (a+b)x + \overline{(a+b)} \\ &= cx + \bar{c}\end{aligned}$$

Por lo que la propiedad se cumple.

Cerradura para la multiplicación por un escalar. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha(ax + \bar{a}) = \alpha ax + \alpha\bar{a}$$

Por propiedades del conjugado $\alpha\bar{a} = \overline{\alpha a}, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ se obtiene

$$\alpha a x + \alpha\bar{a} = \alpha a x + \overline{\alpha a}$$

Por lo tanto, se cumple la propiedad. En consecuencia, el conjunto H es un subespacio vectorial.

EJEMPLO 2.6. Dados los subespacios vectoriales

$$A = \{(x, y, z) | x - y + z = 0; x, y, z \in \mathbb{R}\}, \qquad B = \{(x, y, z) | x + y - 2z = 0; x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

verifíquese si el conjunto $A \cap B$ es un subespacio.

Geométricamente (véase figura 2.1), los subespacios A y B definen cada un plano; las restricciones son las ecuaciones cartesianas para sendos planos.

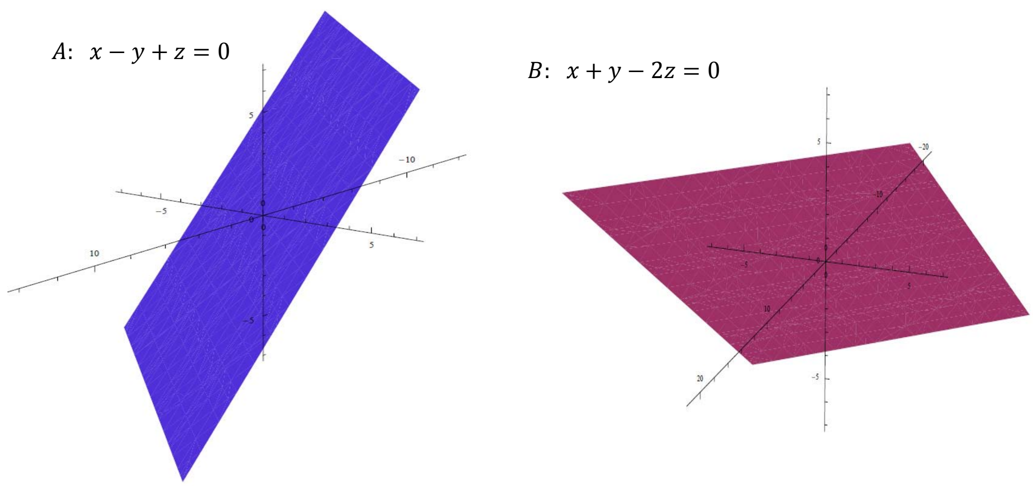

Figura 2.1. Planos A y B del ejemplo 2.6.

Entonces, la intersección entre dos planos debe ser una recta. El primer paso será obtener el subconjunto, el cual nace al hacer cumplir las dos condiciones al mismo tiempo; es decir, se plantea un sistema de ecuaciones con las condiciones de cada subespacio: $x - y + z = 0$ y $x + y - 2z = 0$.

Al resolver el sistema de ecuaciones se llega a que el conjunto solución es $S = \{(x, 3x, 2x) | x \in \mathbb{R}\}$, que es el subespacio buscado, pues son las restricciones que satisfacen tanto al subespacio A como al subespacio B.

Elemento neutro. Si $x = 0$, se obtiene al vector $(0,0,0)$. Se cumple la propiedad.

Cerradura para la suma de vectores. Si $x + y = z$ se obtiene

$$\begin{aligned}(x, 3x, 2x) + (y, 3y, 2y) &= (x + y, 3x + 3y, 2x + 2y)\\ &= (z, 3z, 2z)\end{aligned}$$

La propiedad se cumple.

Cerradura para la multiplicación por un escalar. Si $\alpha x = z$ se obtiene

$$\begin{aligned}\alpha(x, 3x, 2x) &= (-\alpha x, 3\alpha x, 2\alpha x)\\ &= (z, 3z, 2z)\end{aligned}$$

Se cumple la propiedad.

Por lo tanto, se concluye que el conjunto $A \cap B$ es un subespacio vectorial. La figura 2.2 muestra el subespacio intersección de manera geométrica.

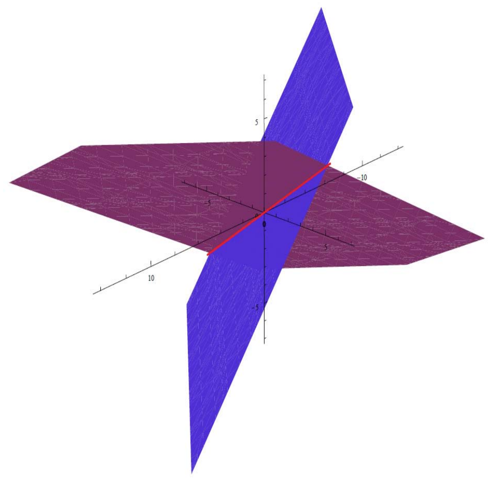

Figura 2.2. Recta intersección (en rojo) entre los planos A y B del ejemplo 2.6.

La pertenencia del vector nulo en un subconjunto es una condición necesaria, mas no es suficiente para cumplir con un subespacio vectorial. A partir de este ejemplo, se observa que, geométricamente, un subespacio representa a una recta o un plano que atraviesan el origen.

Combinación lineal

Una vez que se tienen los conceptos de espacio y subespacio vectorial, el estudio del Álgebra Lineal se centra en los elementos de estas estructuras: los vectores. Con estos elementos, y con las operaciones definidas en el espacio, pueden realizarse combinaciones para obtener nuevos vectores.

EJEMPLO 2.7. Sea D_3 el espacio vectorial de las matrices diagonales de orden tres con elementos reales sobre el campo de los reales; y sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \in D_3$$

Es posible obtener la matriz C a partir de A y B, utilizando escalares y las operaciones de suma y multiplicación por un escalar. Así, para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$(-2) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + (1) \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2+3 & & \\ & 4-2 & \\ & & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo, las matrices A y B se combinan con los escalares α_1 y α_2 para dar surgimiento a la matriz C. Este concepto se conoce como **combinación lineal**.

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K, donde $\bar{u}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_n \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in K$. Una combinación lineal es la utilización sucesiva de la suma y la multiplicación por un escalar para generar un vector del espacio vectorial; es decir,

$$\bar{u} = \alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + \alpha_3\bar{v}_3 + \cdots + \alpha_n\bar{v}_n$$

Se dice entonces, que $\bar{u}$ es una combinación lineal de $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_n$.

EJEMPLO 2.8. Sean los polinomios $p(x) = 2ix^2 + 2$, $q(x) = x + i$ y $r(x) = x^2 + x + 1$. Determínese los escalares $\alpha_i \in \mathbb{R}$, que permiten al vector $f(x) = (1+i)x + (-1+2i)$ ser combinación lineal de los polinomios p, q y r.

El problema indica que pueda realizarse una combinación lineal; es decir,

$$\alpha_1(2ix^2 + 2) + \alpha_2(x + i) + \alpha_3(x^2 + x + 1) = (1+i)x + (-1+2i)$$

En este caso, la parte izquierda de la ecuación debe operarse para obtener la parte derecha; el procedimiento más adecuado será realizar las multiplicaciones de cada vector por el respectivo escalar y después reducir los términos semejantes.

$$\begin{aligned}(2i\alpha_1x^2 + 2\alpha_1) + (\alpha_2x + i\alpha_2) + (\alpha_3x^2 + \alpha_3x + \alpha_3) &= (1+i)x + (-1+2i)\\ (2i\alpha_1 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)x + (2\alpha_1 + i\alpha_2 + \alpha_3) &=\end{aligned}$$

Por el concepto de igualdad en los polinomios se obtienen tres ecuaciones:

$$(2i\alpha_1 + \alpha_3)x^2 = 0x^2$$

$$(\alpha_2 + \alpha_3)x = (1+i)x$$

$$(2\alpha_1 + i\alpha_2 + \alpha_3) = -1 + 2i$$

Al reescribir estas ecuaciones, se tiene el siguiente sistema simultáneo:

$$\begin{array}{cccccc} 2i\alpha_1 & & +\alpha_3 & = & 0 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & = & 1+i \\ 2\alpha_1 & +i\alpha_2 & +\alpha_3 & = & -1+2i \end{array}$$

De donde se obtiene fácilmente que $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_3 = i$. De manera general, una combinación lineal siempre producirá un sistema de ecuaciones lineales.

Dependencia lineal

El concepto de combinación lineal incluye un contexto en el cual se dictamina cuando un vector dado es formado por otros vectores; dicho en otras palabras, cuando un vector depende de otros para existir.

EJEMPLO 2.9. Dados los vectores $\bar{u} = (-1, 1, -2)$, $\bar{v} = (-1, 2, -3)$ y $\bar{w} = (-2, 3, -5)$. Se puede comprobar que el tercer vector es la suma de los dos primeros; es decir, el tercer vector es dependiente de los primeros dos:

$$(-1, 1, -2) + (-1, 2, -3) = (-2, 3, -5)$$

Esta relación que puede establecerse con los vectores se conoce como dependencia lineal. La figura 2.3 muestra geométricamente la dependencia lineal (método del paralelogramo).

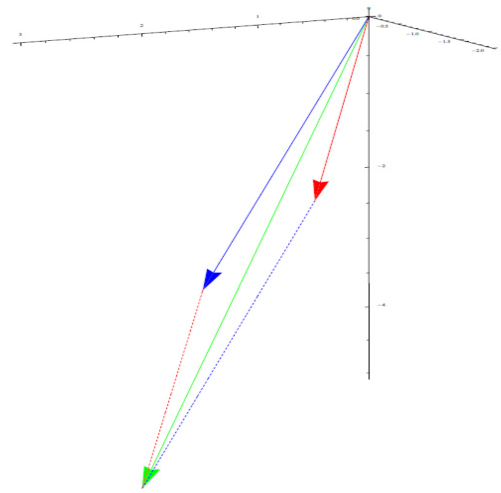

Figura 2.3. Dependencia lineal entre $\bar{w}$ (verde), $\bar{v}$ (azul) y $\bar{u}$ (rojo).

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K, y sea el conjunto $A = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_n\}$. El conjunto A es linealmente dependiente, si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in K$ no todos nulos, tales que

$$\alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + \alpha_3\bar{v}_3 + \cdots + \alpha_n\bar{v}_n = \bar{0} \dots (*)$$

Cuando los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ son todos nulos, el conjunto A es linealmente independiente. A la ecuación $(*)$ se le conoce como ecuación de dependencia lineal.

Si la ecuación de dependencia lineal se verifica con todos los escalares iguales a cero, entonces los vectores son independientes; si existe al menos un escalar que no es nulo, entonces los vectores son dependientes. Es importante considerar las siguientes notas de acuerdo con la dependencia lineal para reducir la definición, y agilizar el análisis de un conjunto de vectores dado:

- ✓ Si en el conjunto de los vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_n\}$, alguno de ellos es el vector nulo, entonces los vectores son linealmente dependientes.
- ✓ Cualquier vector no nulo es, por sí solo, linealmente independiente, debido a que $k\bar{v} = \bar{0}, \bar{v} \neq \bar{0} \Rightarrow k = 0$.
- ✓ Si dos vectores del conjunto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_n\}$ son iguales, o uno es múltiplo escalar de otro, entonces el conjunto es linealmente dependiente.
- ✓ Un conjunto de vectores es linealmente dependiente, si al menos uno de ellos es una combinación lineal de los demás.
- ✓ Si el conjunto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_n\}$ es linealmente independiente, cualquier ordenación del conjunto también lo será.
- ✓ Si el conjunto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_n\}$ es linealmente independiente, cualquier subconjunto de él también lo será; si en conjunto es linealmente dependiente, existe al menos un subconjunto dependiente.

EJEMPLO 2.10. Determínese si el siguiente conjunto es linealmente dependiente o independiente:

$$\left\{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Es algo difícil verificar directamente si el conjunto es linealmente dependiente, por lo que se recurrirá a la ecuación de dependencia lineal:

$$\beta_1\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\beta_2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\beta_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\beta_4\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Se obtendrá un sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{array}{rrrrcl} 3\beta_1 & +\beta_2 & & & = & 0\\ \beta_1 & +\beta_2 & & +2\beta_4 & = & 0\\ \beta_1 & +\beta_2 & +\beta_3 & & = & 0\\ -\beta_1 & & +\beta_3 & -\beta_4 & = & 0 \end{array}$$

A partir de este momento se puede verificar la independencia lineal por medio de dos métodos: el primero establece resolver el sistema, y si la solución es únicamente trivial, entonces el conjunto es independiente; el segundo método establece utilizar la matriz de coeficientes y verificar si es no-singular (que corresponde a un SEL compatible determinado), habiendo independencia lineal si la matriz inversa existe.

Método 1. Se escalona la matriz de coeficientes y se obtiene la solución.

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 6\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim$$

La solución es el conjunto $S=\{(\beta_4,-3\beta_4,2\beta_4,\beta_4)|\beta_4\in\mathbb{R}\}$. Como la solución no sólo es trivial, entonces los vectores son linealmente dependientes.

Método 2. Se investigará si la matriz de coeficientes es no-singular; por medio del valor del determinante se investigará la naturaleza de los vectores: si el determinante es cero, existe dependencia lineal; si el determinante es diferente de cero, hay independencia lineal.

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix}\sim\begin{vmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\Rightarrow-(5-5)=0$$

Por lo tanto, el sistema no es compatible determinado. Se reitera, que el conjunto de matrices es linealmente dependiente.

Nótese que la matriz de coeficientes, obtenida al aplicar la ecuación de dependencia lineal al conjunto de matrices, está formada por las componentes de los vectores dispuestas en forma de columna, siendo la primera columna el primer vector, la segunda el segundo, y así sucesivamente. Es conveniente hacer hincapié que esta disposición de elementos permite formar más rápidamente la matriz a la cual se le hará la prueba de singularidad; en caso de que no sea una matriz cuadrada, se puede hacer la inspección de la dependencia lineal por medio del escalonamiento de la matriz de coeficientes transpuesta.

EJEMPLO 2.11. Sea el conjunto $G=\{(-y,1,y,0),(0,2y,-1,1),(-2,5,1,1)\}$. Determínese el valor de $y\in\mathbb{R}$ para que el conjunto G sea linealmente dependiente.

Al recurrir a la ecuación de dependencia lineal se obtiene

$$\alpha_1(-y,1,y,0)+\alpha_2(0,2y,-1,1)+\alpha_3(-2,5,1,1)=(0,0,0,0)$$

Cuya matriz de coeficientes es una matriz de orden 4×3. En este caso, no será de mucha utilidad resolver el sistema, ya que estaría en función de la variable y; además, por ser una matriz rectangular no puede obtenerse un determinante. Para determinar la dependencia lineal se recurrirá a la matriz de coeficientes transpuesta:

$$\begin{pmatrix}-y & 1 & y & 0\\ 0 & 2y & -1 & 1\\ -2 & 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Con esta matriz se realiza el proceso de escalonamiento, atendiendo que al ser tres vectores, uno de ellos deberá ser dependiente de los otros dos; es decir, se deben obtener dos reglones no-nulos de la matriz de coeficientes.

$$\begin{pmatrix}-y & 1 & y & 0\\ 0 & 2y & -1 & 1\\ -2 & 5 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2 & 5 & 1 & 1\\ 0 & 2y & -1 & 1\\ -y & 1 & y & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 2y & -1 & 1\\ -y & 1 & y & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 2y & -1 & 1\\ 0 & 1-\frac{5}{2}y & \frac{1}{2}y & -\frac{1}{2}y\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 2y & -1 & 1\\ 0 & 1-\frac{5}{2}y & \frac{1}{2}y & -\frac{1}{2}y\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 2y & -1 & 1\\ 0 & y^2-\frac{5}{2}y+1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Del último renglón se observa que todos sus elementos o son nulos o dependen de y. Para que haya dependencia lineal, ese último renglón debe ser nulo (combinación lineal de los otros dos renglones), por lo tanto:

$$y^2-\frac{5}{2}y+1=0\Rightarrow y=2, y=\frac{1}{2}$$

Se puede verificar fácilmente que al sustituir estos valores en el conjunto se tiene que el tercer vector es una combinación lineal de los dos primeros; por lo tanto, hay dependencia lineal. Como última aclaración, se puede notar que los renglones de la matriz de coeficientes transpuesta están formados por los vectores del conjunto G; es decir, los vectores son las filas de una matriz, que al ser escalonada arrojarán un número determinado de renglones nulos (demostrarán la dependencia o independencia lineal).

Conjunto generador de un espacio vectorial

La combinación lineal es una herramienta muy poderosa dentro de los espacios vectoriales; permite generar un vector a partir de otro, o bien de un conjunto pequeño de vectores. Con esta propiedad, se pude formular la siguiente pregunta: ¿es probable que a partir de un conjunto de vectores se genere todo un espacio vectorial? La respuesta es sí. Existen conjuntos de vectores que permiten generar todo el espacio vectorial al utilizar la infinidad de elementos del campo sobre el cual se define el espacio.

Sea V un espacio vectorial sobre K, y sea

$$G=\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3,\dots,\bar{v}_n\}$$

un conjunto de vectores de V. Se dice que G es generador de V si para todo vector $\bar{x} \in V$ existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in K$ tales que

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \alpha_3 \bar{v}_3 + \cdots + \alpha_n \bar{v}_n$$

Es decir, si cualquier vector $\bar{x} \in V$ puede expresarse como una combinación lineal de los elementos de G, entonces G es un conjunto generador. Este concepto no especifica que cualquier conjunto pueda generar un espacio vectorial; es necesario que se cumpla una condición específica: el sistema de ecuaciones planteado durante la combinación lineal debe ser compatible; en caso contrario, el conjunto no es generador.

Otra idea importante es el hecho que un conjunto por sí mismo es generador, no de un espacio vectorial pero sí de un subespacio. Entonces, también es posible extender el concepto de conjunto generador a los subespacios vectoriales.

EJEMPLO 2.12. Se desea verificar si los conjuntos

$$G_1 = \{(-2,0,0),(0,1,2),(0,0,-1),(0,1,-1)\}, \qquad G_2 = \{(1,1,0),(0,0,1),(-2,-2,2)\}$$

Generan al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

Para el conjunto G_1 se establece una combinación lineal igualada al vector genérico del espacio

$$\alpha_1(-2,0,0) + \alpha_2(0,1,2) + \alpha_3(0,0,-1) + \alpha_4(0,1,-1) = (x,y,z)$$

donde el sistema de ecuaciones planteado es

$$\begin{array}{cccccc} -2\alpha_1 & & & & = & x \\ & \alpha_2 & & +\alpha_4 & = & y \\ & 2\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & = & z \end{array}$$

Aplicando el método de Gauss se obtiene que

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & y \\ 0 & 2 & -1 & -1 & \vdots & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & y \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \vdots & 2y-z \end{pmatrix}$$

donde se verifica que el sistema de ecuaciones lineales es compatible, y en consecuencia el conjunto G_1 si es generador del espacio vectorial de ternas reales ordenadas.

El mismo examen se realiza al conjunto G_2, del cual se obtiene la siguiente combinación lineal:

$$\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,0,1) + \alpha_3(-2,-2,2) = (x,y,z)$$

donde se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & & -2\alpha_3 & = & x \\ \alpha_1 & & -2\alpha_3 & = & y \\ & \alpha_2 & +2\alpha_3 & = & z \end{array}$$

cuya matriz de coeficientes, ayudará a verificar si el conjunto es generador:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \vdots & x \\ 1 & 0 & -2 & \vdots & y \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \vdots & x \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & x-y \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & z \end{pmatrix}$$

La segunda ecuación resulta ser degenerada, por lo tanto, el sistema es incompatible; en conclusión, el conjunto G_2 no genera al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 2.13. ¿Cuál es el subespacio vectorial generado por el conjunto Q?

$$Q = \{x^2 - 2x + 1, -x^2 + x - 1\}$$

En primera instancia se recurre a la combinación lineal

$$\omega_1(x^2 - 2x + 1) + \omega_2(-x^2 + x - 1) = ax^2 + bx + c$$

donde se obtienen el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rrcl} \omega_1 & -\omega_2 & = & a \\ -2\omega_1 & +\omega_2 & = & b \\ \omega_1 & -\omega_2 & = & c \end{array}$$

el cual genera la siguiente matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & a \\ -2 & 1 & \vdots & b \\ 1 & -1 & \vdots & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & a \\ 0 & 1 & \vdots & -2a-b \\ 0 & 0 & \vdots & a-c \end{pmatrix}$$

El último renglón es ecuación degenerada; por ello es necesario establecer una condición para que el sistema de ecuaciones sea compatible, y el conjunto genere un subespacio; la condición es $a - c = 0$ para forzar un renglón completo de ceros en la matriz de coeficientes equivalente.

Con esa condición, se establece que el subespacio generado por Q es

$$\begin{aligned} L(Q) &= \{ax^2 + bx + c | a - c = 0; a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{ax^2 + bx + a | a, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Este tipo de planteamientos permite establecer las condiciones que debe cumplir un subespacio vectorial. Si en la matriz se hubiesen obtenido dos o más ecuaciones degeneradas, el término independiente en cada una de ellas debe igualarse a cero para forzar a la compatibilidad; en dicho escenario, esas igualdades a cero serán las condiciones que debe cumplir el subespacio generado.

Base y dimensión de un espacio vectorial

Los conjuntos generadores pueden ser linealmente dependientes o independientes. No existe restricción alguna sobre la naturaleza que deba poseer un conjunto generador, sólo debe enfocarse en generar un espacio vectorial. Sin embargo, los conjuntos que presentan independencia lineal tienen propiedades específicas dentro de los espacios vectoriales, las cuales les confieren una importancia enorme debido al gran número de aplicaciones dentro de la Matemática, la Ingeniería y muchas otras ramas del conocimiento humano.

Con base en la dependencia lineal, un conjunto generador puede clasificarse como generador, si es linealmente dependiente o independiente, o como **base**, si es estrictamente independiente.

Sea $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_n\}$ un conjunto finito de vectores de un espacio vectorial V sobre un campo K. El conjunto B es una base de V si

1. B es un conjunto generador de V.
2. B es linealmente independiente.

Las bases poseen las siguientes propiedades:

- ✓ Un conjunto linealmente independiente siempre será una base del espacio vectorial que genera.
- ✓ Un espacio vectorial puede tener una infinidad de bases.
- ✓ Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.
- ✓ La base es un conjunto ordenado; la base $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_n\}$ no es la misma que la base $\{\bar{b}_n, \dots, \bar{b}_3, \bar{b}_2, \bar{b}_1\}$, aunque ambas contengan los mismos elementos.

EJEMPLO 2.14. ¿Cuál de los siguientes conjuntos es una base del espacio vectorial dado?

a. $B_1 = \{2ix + 2i, x + 1\}$, si $P_1 = \{ax + b | a, b \in \mathbb{C}\}$

b. $B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, si $M_2 = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & c\end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$

Para el conjunto B_1 se construye la matriz de coeficientes para verificar si existe independencia lineal, por medio del determinante.

$$\begin{pmatrix}2i & 1\\ 2i & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}2i & 1\\ 2i & 1\end{vmatrix} = 2i - 2i$$

Lo cual implica que existe dependencia lineal en el conjunto, y por lo tanto no es una base del espacio vectorial P_1.

El conjunto B_2 no posee una matriz de coeficientes cuadrada, por lo que se escalonará su transpuesta para verificar si existe independencia lineal.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Como la matriz ya está en forma escalonada, y no existen renglones de ceros, se comprueba que el conjunto es linealmente independiente. Para saber si es un conjunto generador, se utilizará la combinación lineal

$$\beta_1 \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ -b & c\end{pmatrix}$$

Cuya matriz de coeficientes ampliada asociada es

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & a\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & b\\ 0 & -1 & 0 & \vdots & -b\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & c\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & a\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & b\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & c\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & a\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & b\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & c\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

Como no existen ecuaciones degeneradas en la matriz de coeficientes escalonada, significa que el conjunto es generador del espacio vectorial; en consecuencia, se concluye que el conjunto B_2 es una base del espacio vectorial M_2.

Es este ejemplo puede observarse que existe una relación entre la base B_2 y el espacio vectorial al cual genera: la base, además de ser conjunto generador linealmente independiente, tiene tres elementos, el mismo número de variables libres $(a,\ b,\ c)$ del espacio vectorial M_2. Esta relación se conoce como dimensión del espacio vectorial.

Dado un espacio vectorial V, se llama dimensión de V al número de vectores de todas sus bases y se denota como

$$\dim V = n$$

Si las bases son conjuntos finitos, entonces a V se le conoce como espacio vectorial de dimensión finita; en caso contrario, V es un espacio vectorial de dimensión infinita. Por definición, si $V = \{\bar{0}\}$, entonces $\dim V = 0$.

EJEMPLO 2.15. Obténgase la dimensión y una base del conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo dado.

$$\begin{array}{rrrcl} & 2y & +3z & = & 0 \\ 2x & -6y & +7z & = & 0 \\ x & -2y & +5z & = & 0 \end{array}$$

Para resolver el problema, se debe obtener el conjunto solución del sistema.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es

$$S = \left\{ \left(-8z, -\frac{3}{2}z, z \right) \middle| z \in \mathbb{R} \right\}$$

La manera más sencilla para obtener una base a partir de un espacio vectorial conocido es darle valores a las variables libres del espacio; se debe tener especial cuidado en que dichos valores no generen un conjunto linealmente dependiente. Si se toma $z = 2$, se obtiene la base

$$B = \{(-16, -3, 2)\}$$

Como la base tiene un solo elemento, se concluye que $\dim S = 1$.

EJEMPLO 2.16. Obténgase la dimensión y una base de los espacios vectoriales

$$P_3 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d | a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$$

$$Q_3 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d | a + b = 0; a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$$

Debe ponerse especial atención en que ambos espacios son diferentes, ya que Q_3 presenta una condición que todos sus polinomios deben cumplir.

Los valores más fáciles son 1 y 0, por lo que la base tendrá: para el primer vector $a = 1$ y las demás ceros, para el segundo $b = 1$ y las demás ceros, y así sucesivamente. En este ejemplo, la base para P_3 será

$$B_P = \{x^3, x^2, x, 1\}$$

Este tipo de base se conocen como base natural o base estándar; en los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ se llama **base canónica**. Como la base tiene cuatro elementos $\dim P_3 = 4$, que coincide con el número de variables libres del espacio vectorial.

Para el caso de Q_3 es necesario sustituir la condición y dar valores al vector genérico.

$$\begin{aligned} Q_3 &= \{ax^3 + bx^2 + cx + d | a + b = 0; a, b, c, d \in \mathbb{C}\} \\ &= \{-bx^3 + bx^2 + cx + d | b, c, d \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

Para este espacio, al dar los valores $b = 2$ para un vector, $c = 1$ al siguiente y $d = -3$ al último una base es

$$B_Q = \{-2x^3 + 2x^2, x, -3\}$$

La base tiene tres elementos, lo que implica que $\dim Q_3 = 3$. Utilizando el razonamiento del espacio P_3, se puede observar que la dimensión es igual al número de variables libres menos el número de restricciones.

En este ejemplo puede verse que Q_3 es un subespacio de P_3, y que la $\dim Q_3 < \dim P_3$; además, con ayuda de las dos bases se puede inferir que el número de elementos de un conjunto linealmente independiente no es mayor que la dimensión del espacio vectorial. Estas dos ideas son importantes, ya que permiten establecer un orden y una pertenencia en los espacios y subespacios vectoriales. De manera puntual:

- ✓ Sea V un espacio vectorial tal que $\dim V = n$. Si $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_m\}$ es un conjunto de m vectores linealmente independientes en V, entonces $m \leq n$.
- ✓ Sea H un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V. Entonces, H tiene dimensión finita y $\dim H \leq \dim V$.

Coordenadas de un vector respecto a una base ordenada

Debido a la propiedad de una base para generar un espacio vectorial, significa que cada vector del espacio vectorial puede representarse como una combinación lineal de los elementos de la base. De dicha combinación lineal se conocen los vectores que intervienen, mas no los escalares; éstos se obtienen, como se ha visto, a partir de un sistema de ecuaciones lineales planteado por la combinación; es decir, los escalares que hacen factible la combinación lineal son la solución de un SEL compatible determinado, y se les conoce como coordenadas.

Este concepto permite ubicar a cualquier vector dentro del espacio vectorial, donde la referencia será una base determinada que puede o no ser estándar.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, un vector $\bar{v} \in V$ y una base

$$B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n\}$$

El vector $\bar{v}$ puede expresarse como una combinación lineal de la base B:

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \bar{b}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{b}_n$$

A los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ se les conoce como coordenadas de $\bar{v}$ en la base B. Como la base es un conjunto ordenado, las coordenadas también son ordenadas; por lo tanto, se les puede representar como un vector de $\mathbb{R}^n$. Es decir,

$$[\bar{v}]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Dicho vector es conocido como vector de coordenadas de $\bar{v}$ en la base B.

EJEMPLO 2.17. Sea la base $A = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$. ¿Cuál es el vector de coordenadas de $\bar{u} = (1,2,3)$ en la base A?

Se plantea la siguiente combinación lineal:

$$(1,2,3) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(1,0,1)$$

De donde se obtiene le sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & & +\alpha_3 & = & 1 \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & & = & 2 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & = & 3 \end{array}$$

Cuya solución es $S = \{(0,2,1)\}$. Si se sustituyen en la combinación lineal

$$\begin{aligned}(1,2,3) &= (0)(1,1,0) + (2)(0,1,1) + (1)(1,0,1) \\ &= (0,0,0) + (0,2,2) + (1,0,1) \\ &= (1,2,3)\end{aligned}$$

Y el vector de coordenadas buscado es $[\bar{u}]_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. En la figura 2.4 se observa la ubicación del vector $\bar{u}$ en el sistema de referencia formado por los elementos de la base A. Ésa es la representación geométrica del vector de coordenadas.

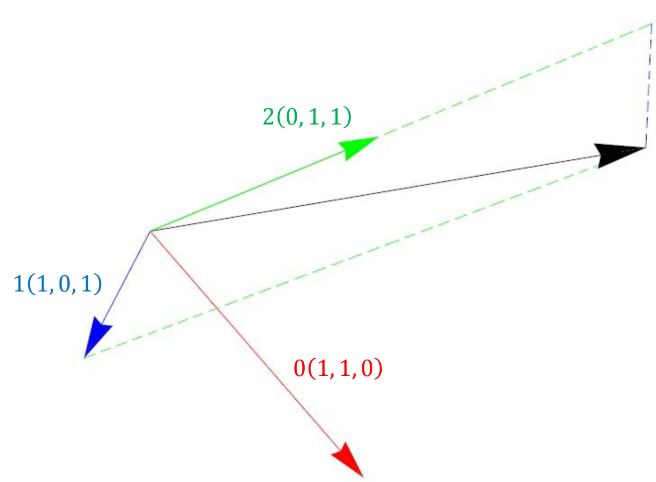

Figura 2.4. Los vectores $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ y $(1,0,1)$ forman un sistema de referencia, y permiten la ubicación del vector $\bar{u}$ (negro).

EJEMPLO 2.18. Sea la base $C = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2\}$ del espacio vectorial

$$M = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ y & x+y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

y sean las matrices $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \in M$. Si se sabe que $[\bar{x}_1]_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $[\bar{x}_2]_C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, determínese los vectores de la base C.

Por el concepto de vector de coordenadas, se sabe que cada vector $\bar{x}_i$ se puede representar como combinación lineal de los vectores de la base C, y se obtiene un sistema de ecuaciones matriciales con dos incógnitas

$$\begin{array}{rcrrl} \bar{x}_1 & = & -\bar{c}_1 & +2\bar{c}_2 & \dots(1) \\ \bar{x}_2 & = & 2\bar{c}_1 & -3\bar{c}_2 & \dots(2) \end{array}$$

Al multiplicar la ecuación (1) por dos y sumándola a la ecuación (2) se obtiene

$$\begin{aligned} 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 &= 4\bar{c}_2 - 3\bar{c}_2 \\ 2\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} &= \bar{c}_2 \\ \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} &= \end{aligned}$$

Al sustituir este vector en la ecuación (1) se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= -\bar{c}_1 + 2\bar{c}_2 \\ \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} &= -\bar{c}_1 + 2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} &= \bar{c}_1 \\ \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \end{aligned}$$

Por lo tanto, la base buscada es

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Este ejercicio ejemplifica que para cada vector $\bar{v} \in V$ existe uno y sólo un vector de coordenadas referido a una y sólo una base.

Matriz de transición

En vista que una base puede generar cualquier vector del espacio vectorial, y que dicho espacio puede tener una infinidad de bases, cabe la posibilidad de preguntarse: ¿es posible que una base genere a otra base? La respuesta es sí; como los vectores de una base son parte del espacio vectorial, significa que los elementos de otra base diferente pueden generar a la primera sin ninguna restricción.

Sean las bases del espacio vectorial V

$$A = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}, \qquad B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_n\}$$

Los vectores de la base A pueden expresarse como combinación lineal de los elementos de la base B; es decir,

$$\bar{a}_1 = \alpha_{11}\bar{b}_1 + \alpha_{21}\bar{b}_2 + \alpha_{31}\bar{b}_3 + \cdots + \alpha_{n1}\bar{b}_n$$
$$\bar{a}_2 = \alpha_{12}\bar{b}_1 + \alpha_{22}\bar{b}_2 + \alpha_{32}\bar{b}_3 + \cdots + \alpha_{n2}\bar{b}_n$$
$$\bar{a}_3 = \alpha_{13}\bar{b}_1 + \alpha_{23}\bar{b}_2 + \alpha_{33}\bar{b}_3 + \cdots + \alpha_{n3}\bar{b}_n$$
$$\vdots$$
$$\bar{a}_n = \alpha_{1n}\bar{b}_1 + \alpha_{2n}\bar{b}_2 + \alpha_{3n}\bar{b}_3 + \cdots + \alpha_{nn}\bar{b}_n$$

Si estos vectores de coordenadas se ordenan por columnas en una matriz, el arreglo obtenido será:

$$M_B^A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \left([\bar{a}_1]_B \quad [\bar{a}_2]_B \quad \cdots \quad [\bar{a}_n]_B\right)$$

Esta matriz se conoce como matriz de transición de la base A a la base B.

La siguiente pregunta a plantearse es: ¿para qué sirve esta matriz? La respuesta surge a partir de la posibilidad para generar vectores con diferentes bases.

Sea $\bar{x} \in V$. A partir de las bases definidas con anterioridad se puede establecer

$$\bar{x} = \beta_1\bar{a}_1 + \beta_2\bar{a}_2 + \beta_3\bar{a}_3 + \cdots + \beta_n\bar{a}_n$$

$$\bar{x} = \gamma_1\bar{b}_1 + \gamma_2\bar{b}_2 + \gamma_3\bar{b}_3 + \cdots + \gamma_n\bar{b}_n$$

La matriz de transición también es conocida como matriz de cambio de base, ya que tiene la propiedad de obtener vectores de coordenadas referido a una base B, a partir del vector de coordenadas referido a la base A; es decir,

$$[\bar{x}]_B = M_B^A[\bar{x}]_A$$

Nótese que la notación permite establecer el orden en el cual se establece el cambio de una base a la otra.

Las propiedades de la matriz de cambio de base son:

- ✓ Siempre es cuadrada.
- ✓ Es no-singular (tiene inversa).
- ✓ La matriz $M_A^B = \left(M_B^A\right)^{-1}$.
- ✓ Siempre estará formada por escalares.

Este tipo de matrices permiten a un vector cambiar de una base a otra, sin necesidad de realizar combinaciones lineales ni sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 2.19. Sean el vector $\bar{p} = 2x^2 - x + 3$, y las bases

$$A = \{x^2 + x, x + 1, x^2 + 1\}$$

$$B = \{x^2, -x, 1\}$$

Encuéntrese $[\bar{p}]_A$ utilizando la matriz de transición de la base B a la base A.

Para obtener la matriz de transición pedida, los elementos de la base B deben expresarse como combinación lineal de la base A.

$$x^2 = \alpha_1(x^2+x) + \alpha_2(x+1) + \alpha_3(x^2+1) \Rightarrow [x^2]_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-x = \beta_1(x^2+x) + \beta_2(x+1) + \beta_3(x^2+1) \Rightarrow [-x]_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1 = \gamma_1(x^2+x) + \gamma_2(x+1) + \gamma_3(x^2+1) \Rightarrow [1]_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de transición de la base B a la base A es

$$M_A^B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar el vector de coordenadas pedido, se calcula el vector de coordenadas $[\bar{p}]_B$.

$$2x^2 - x + 3 = \alpha_1(x^2) + \alpha_2(-x) + \alpha_3(1) \Rightarrow [2x^2 - x + 3]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y por las propiedades de la matriz de transición

$$\begin{aligned} [\bar{p}]_A &= M_A^B[\bar{p}]_B \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-1-3 \\ -2-1+3 \\ 2+1+3 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el vector de coordenadas es $[\bar{p}]_A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 2.20. Sean el espacio vectorial $V = \left\{ \begin{pmatrix} a+2ai & b \\ b-bi & 4a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1} \right\}$ sobre el campo de los reales, las bases

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1+i & 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad C = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2\}$$

y la matriz de transición $M_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a. Encuéntrese $[\bar{v}]_B$ si se sabe que $[\bar{v}]_C = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

b. El vector $\bar{v}$.

c. Los vectores de la base C.

Este problema considera varios puntos, en los cuales se utiliza la matriz de transición dada.

a. Se sabe que la matriz de transición permite encontrar vectores de coordenadas al aplicar

$$[\bar{v}]_C = M_C^B[\bar{v}]_B$$

Pero, además se sabe que $(M_C^B)^{-1} = M_B^C$. Por lo tanto, premultiplicando a ambos lados por esta matriz se obtiene

$$\begin{aligned}(M_C^B)^{-1}[\bar{v}]_C &= (M_C^B)^{-1}M_C^B[\bar{v}]_B\\ (M_C^B)^{-1}[\bar{v}]_C &= [\bar{v}]_B\\ M_B^C[\bar{v}]_C &=\end{aligned}$$

Para resolver este punto, se debe obtener la inversa de la matriz de transición proporcionada en el ejemplo.

$$M_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow M_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

y finalmente se calcula:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+0 \\ 4-7 \end{pmatrix} \Rightarrow [\bar{v}]_B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b. Este inciso se resuelve utilizando la base B y el vector de coordenadas encontrado en el inciso anterior.

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \alpha_1\bar{b}_1 + \alpha_2\bar{b}_2\\ &= -4\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1+i & 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} -4-8i & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3-3i & 0 \end{pmatrix}\\ \bar{v} &= \begin{pmatrix} -4-8i & 3 \\ 3-3i & -16 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

c. Para encontrar cada uno de los vectores de la base C se utiliza la matriz de transición calculada en el primer inciso, debido a que dicha matriz se obtiene por

$$M_B^C = \left([\bar{c}_1]_B \quad [\bar{c}_2]_B\right)$$

Por lo tanto, se calcula

$$\begin{aligned}\bar{c}_1 &= (1)\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1+i & 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 1+2i & 1 \\ 1-i & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c}_2 &= (0)\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1+i & 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2-2i & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

y la base buscada es

$$C=\left\{\begin{pmatrix}1+2i & 1\\ 1-i & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2-2i & 0\end{pmatrix}\right\}$$

Se puede verificar que la relación entre dos bases de un mismo espacio vectorial se da por medio de la matriz de transición; además, no importa qué base se utilice, siempre podrá generar cualquier vector del espacio vectorial.

Espacio renglón, espacio columna y rango de una matriz

En temas anteriores se ha visto que es posible acomodar los vectores de un conjunto como renglones de una matriz, y así verificar su independencia lineal. Este procedimiento permite generar un espacio vectorial a partir de los renglones de una matriz dada; en este caso, los vectores pertenecerán a un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

Sea A una matriz de orden $m\times n$. Al conjunto de todas las combinaciones lineales que pueden formarse con los renglones de A se le conoce como **espacio renglón** de la matriz A, y está denotado como

$$L_R(A)=\{\bar{r}_1,\bar{r}_2,\bar{r}_3,\dots,\bar{r}_m\}$$

donde $\bar{r}_i$ es un renglón de A.

Como la matriz tiene n columnas, sus renglones son un conjunto generador de un subespacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, posiblemente el conjunto sea linealmente dependiente; para verificar dicha naturaleza se puede aplicar el método de Gauss para obtener renglones de ceros. Los renglones no-nulos obtenidos al escalonar la matriz formarán una base del espacio renglón. Cabe destacar que si la matriz se lleva a forma canónica escalonada, entonces los renglones linealmente independientes serán la base natural del espacio renglón.

Cuando una matriz se escalona por medio de transformaciones elementales entre renglones, se dice que la matriz resultante es equivalente a la matriz original; las matrices equivalentes poseen el mismo espacio renglón.

EJEMPLO 2.21. Sea la matriz

$$H=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -2 & 5\\ 2 & -4 & 0 & 6\\ 3 & -4 & -2 & 11\end{pmatrix}$$

¿Cuál es su espacio renglón?

Para obtener $L_R(H)$ se debe escalonar la matriz para obtener una base, y con ella generar el espacio.

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -2 & 5\\ 2 & -4 & 0 & 6\\ 3 & -4 & -2 & 11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2 & -2\\ 1 & -2 & 0 & 3\\ 0 & -2 & 2 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Después de aplicar el método de Gauss se obtiene una matriz con dos vectores linealmente independientes y tres renglones nulos; en este momento se tiene una de las bases del espacio renglón, pero es conveniente llevar a la matriz a su forma canónica escalonada.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La base natural del espacio es

$$B_{L_R(H)} = \{(1,0,-2,5),(0,1,-1,1)\}$$

Por lo tanto, el espacio renglón se genera con la combinación lineal

$$a(1,0,-2,5) + b(0,1,-1,1) = (a,b,-2a-b,5a+b)$$

y, finalmente,

$$L_R(H) = \{(a,b,-2a-b,5a+b) | a,b \in \mathbb{R}\}$$

Si los renglones de una matriz son capaces de generar un espacio vectorial, significa que las columnas también poseen esa propiedad; este escenario define al llamado espacio columna.

Sea B una matriz de orden $m \times n$. Al conjunto de todas las combinaciones lineales que pueden formarse con las columnas de B se le conoce como espacio columna de la matriz B, y está denotado como

$$L_C(B) = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \ldots, \bar{c}_n\}$$

donde $\bar{c}_i$ es una columna de B.

La matriz tiene m renglones, eso significa que el espacio generado es un subespacio de $\mathbb{R}^m$. Debido a la analogía que puede hacerse con respecto al manejo de renglones de una matriz, sus columnas pueden estudiarse de la misma manera, aplicándoles las mismas reglas de transformaciones elementales; la diferencia radica que en lugar de manejar arreglos horizontales, se manejarán arreglos verticales. Para mayor comodidad, es aconsejable manejar las columnas en forma de renglones; es decir, trabajar con la transpuesta de la matriz original, debido a que las columnas se intercambian con los renglones y viceversa.

EJEMPLO 2.22. Sea la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -2 & -3 & 11 \\ 4 & -5 & 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Determínese su espacio columna.

El espacio $L_C(G)$ se obtiene al hacer una combinación lineal con los elementos todas las columnas linealmente independientes de la matriz; por lo tanto, primero debe transponerse la matriz para aplicar el método de Gauss hasta obtener la matriz canónica escalonada.

$$G^T=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&-3&-4&-5\\0&3&-2&1\\-1&2&-3&0\\1&2&11&12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&3&-2&1\\0&4&0&4\\0&0&-8&-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&8&8\\0&0&8&8\\0&0&-8&-8\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Por lo que la base natural del espacio columna es

$$B_{L_C(G)}=\{(1,0,0,-1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$$

que generan al espacio

$$L_C(G)=\{(a,b,c,-a+b+c)|a,b,c\in\mathbb{R}\}$$

Entre los espacios columna y renglón de una misma matriz se presentan ciertas particularidades; dicha naturaleza es independiente del orden de la matriz. Sea A una matriz de orden $m\times n$; en forma general, se cumple que

- ✓ $L_R(A)\neq L_C(A)$.
- ✓ $\dim L_R(A)=\dim L_C(A)$.
- ✓ La dimensión del espacio generado (renglón o columna) por una matriz se conoce como rango, denotado por $R(A)=\dim L_R(A)\Rightarrow\dim L_C(A)$.

Otra forma de definir el rango es el número máximo de renglones linealmente independientes que contiene la matriz analizada.

Una particularidad importante se presenta en las matrices cuadradas. Sea A una matriz no-singular de orden n; las propiedades de la matriz son:

- ✓ $R(A)=n$.
- ✓ $A\sim I_n$.
- ✓ $\exists\ A^{-1}$.
- ✓ $\det A\neq 0$.
- ✓ Sus renglones son linealmente independientes.
- ✓ Sus columnas son linealmente independientes.

Si A es la matriz de coeficientes de un SEL, entonces dicho sistema es compatible determinado.

Estas propiedades justifican el hecho de que la independencia lineal entre renglones (o columnas) permite generar una matriz no-singular, que está directamente relacionada con los SEL compatibles determinados.

EJEMPLO 2.23. Obténgase el espacio renglón, espacio columna, una base de cada espacio y el rango de la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 & 9 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Para el espacio renglón:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 & 9 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & -5 & 9 \\ 2 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene

$$L_R(A) = \{(a, b, -a + 2b, 3b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$B_{L_R(A)} = \{(1, 0, -1, 3), (0, 1, 2, 0)\}$$

$$\dim L_R(A) = 2$$

Para el espacio columna:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & -2 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -2 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -2 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que se obtiene

$$L_C(A) = \{(a, b, a - b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$B_{L_C(A)} = \{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$$

$$\dim L_C(A) = 2$$

Finalmente, se comprueba que $\dim L_R(A) = \dim L_C(A) \Rightarrow 2$; por lo tanto, el rango de la matriz dada es $R(A) = 2$.

El espacio vectorial de las funciones reales de variable real

Dentro del tema se ha tomado en varios ejemplos conjuntos de polinomios que representan espacios vectoriales. Dentro de la matemática existen dos enfoques para los polinomios: el algebraico, que maneja a estas expresiones como sumas de potencias de una variable; y el analítico, que utiliza en concepto de función para definirles. Con estos dos enfoques se puede afirmar que el espacio de las funciones polinómicas es un espacio vectorial. La anterior afirmación pretende inducir una visión del conjunto de las funciones reales de variable real como vectores; es decir, las funciones pertenecen a un espacio vectorial.

Considerando al conjunto $F(X)$ de todas las funciones reales de variable real, donde la suma de dos funciones y la multiplicación por un escalar se definen como:

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x) \qquad \forall\, f, g \in F(X)$$

$$\alpha[f(x)] = (\alpha f)(x) \qquad \forall\, f \in F(X), k \in \mathbb{R}$$

Entonces, el conjunto $F(X)$ es un espacio vectorial sobre el campo de los reales.

En este espacio vectorial se tiene que el vector nulo es la función $O(x) = 0$, o simplemente 0; mientras que el inverso aditivo para una función $f(x)$ es $-f(x)$.

Debido a que el espacio de funciones puede ser generado por un conjunto infinito de funciones, se establece que $F(X)$ es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Subespacios de dimensión finita

A diferencia de la dimensión del espacio vectorial, algunos subespacios que pueden generarse dentro de él tienen dimensión finita.

EJEMPLO 2.24. Sea el conjunto

$$G = \{\sin x\,, \cos x\,, 1\}$$

Dicho conjunto generará conjuntos de funciones que contengan funciones seno, coseno y escalares, pero no podrá generar funciones, por ejemplo exponenciales.

Si se estudia la independencia lineal del conjunto se observará que los tres elementos son linealmente independientes entre sí, lo que indica que dicho conjunto es una base; al ser un conjunto de esta naturaleza significa que su espacio generado es de dimensión 3, una dimensión finita.

A los diversos subespacios de $F(X)$ se les conoce como espacios funcionales; algunos representantes de estos conjuntos son:

- ✓ El conjunto de los polinomios de grado menor o igual a n, donde n es una constante.
- ✓ El conjunto de las funciones definidas en un intervalo.
- ✓ El conjunto de las funciones derivables en un punto.
- ✓ El conjunto de las funciones integrables en un intervalo.
- ✓ El conjunto de las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

Dependencia lineal de funciones

Para determinar si dos funciones son linealmente independientes se deben considerar dos cosas: la ecuación de dependencia lineal, que dará la conclusión del análisis; y el intervalo de estudio. Es importante determinar en qué intervalo se analizará la dependencia lineal de funciones, ya que en varias ocasiones las funciones pueden estar definidas en un intervalo y en otro no.

Para verificar la independencia lineal se pueden establecer ciertas inducciones con base en el comportamiento de las funciones y la ecuación de dependencia lineal. Sean f y g dos funciones reales de variable real; f y g son linealmente dependientes si,

- ✓ son proporcionales entre sí.
- ✓ puede plantearse una identidad entre ellas.

Si estas condiciones no se cumplen, existe independencia lineal.

EJEMPLO 2.25. Determínese si el conjunto $\{x, e^x\}$ es linealmente dependiente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Este intervalo se considerará desde cero (sin incluir) hasta el infinito. Para analizar el conjunto, se utilizará la ecuación de dependencia lineal.

$$\alpha x + \beta e^x = 0$$

Ninguna de las funciones es el vector nulo, y no puede establecerse una identidad o una constante de proporcionalidad entre ambas. En conclusión, el conjunto dado es linealmente independiente.

EJEMPLO 2.26. Determínese la naturaleza del conjunto

$$\{-\sin^2 x\,, 2\cos^2 x\,, -2\}$$

Este conjunto es linealmente dependiente, ya que puede plantearse una identidad trigonométrica con las tres funciones:

$$\begin{aligned} \alpha(-\sin^2 x) + \beta(2\cos^2 x) &= -2 \\ (-\alpha)(\sin^2 x) + (2\beta)(\cos^2 x) &= \end{aligned}$$

Tomando la identidad $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, se simplifica

$$\begin{aligned} (-\alpha)(\sin^2 x) + (2\beta)(\cos^2 x) &= -2 \\ \left(\frac{\alpha}{2}\right)(\sin^2 x) + (-\beta)(\cos^2 x) &= 1 \end{aligned}$$

Eso significa que $\frac{\alpha}{2} = 1$ y $-\beta = 1$. Finalmente, la combinación lineal se construye con los escalares $\alpha = 2$ y $\beta = -1$:

$$\begin{aligned} (2)(-\sin^2 x) + (-1)(2\cos^2 x) &= -2 \\ (-2\sin^2 x) + (-2\cos^2 x) &= \\ -2(\sin^2 x + \cos^2 x) &= \\ -2(1) &= \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto es linealmente dependiente.

Criterio del wronskiano

Sea al conjunto $H(X) = \{h_1, h_2, h_3, \dots, h_n\}$ de funciones derivables $n-1$ veces en un intervalo dado. Al plantear la ecuación de dependencia lineal se obtendrá

$$\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \alpha_3 h_3 + \cdots + \alpha_n h_n = 0$$

Al derivarla sucesivamente hasta obtener la $(n-1)$-ésima derivada se obtiene le sistema de ecuaciones lineales:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \alpha_3 h_3 + \cdots + \alpha_n h_n &= 0 \\
\alpha_1 h'_1 + \alpha_2 h'_2 + \alpha_3 h'_3 + \cdots + \alpha_n h'_n &= 0 \\
\alpha_1 h''_1 + \alpha_2 h''_2 + \alpha_3 h''_3 + \cdots + \alpha_n h''_n &= 0 \\
&\vdots \\
\alpha_1 h_1^{n-1} + \alpha_2 h_2^{n-1} + \alpha_3 h_3^{n-1} + \cdots + \alpha_n h_n^{n-1} &= 0
\end{aligned}
$$

Debido a que los escalares son incógnitas, se puede establecer el siguiente determinante utilizando a las funciones como la matriz de coeficientes:

$$
W = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \\ h'_1 & h'_2 & \cdots & h'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1^{n-1} & h_2^{n-1} & \cdots & h_n^{n-1} \end{vmatrix}
$$

Este determinante es conocido como wronskiano, y en Álgebra Lineal se utiliza para determinar la dependencia de un conjunto de funciones para un intervalo dado. El criterio implica las siguientes dos reglas:

- ✓ Si $W \neq 0$, entonces las funciones son linealmente independientes en el intervalo dado.
- ✓ Si $W = 0$, el criterio no decide completamente, ya que existen dos posibilidades:
  a. si el wronskiano es uniformemente cero a lo largo del intervalo, las funciones son dependientes.
  b. si el wronskiano no es cero para algún punto del intervalo, las funciones son independientes.

EJEMPLO 2.27. Sea el conjunto

$$\{e^x, x, 1\}$$

Para determinar si es linealmente independiente en el intervalo $(-\infty, \infty)$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
W &= \begin{vmatrix} e^x & x & 1 \\ e^x & 1 & 0 \\ e^x & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -e^x
\end{aligned}
$$

El determinante es diferente de 0, porque la función exponencial nunca podrá tomar valores iguales a 0, independientemente del valor de x. En conclusión, el conjunto es linealmente independiente.

EJEMPLO 2.28. Determínese la naturaleza del conjunto $\{e^x, e^{|x|}\}$ en toda la recta real.

La segunda función puede expresarse como

$$
e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}
$$

Se obtendrían dos wronkianos. Para el intervalo $(-\infty, 0)$

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \begin{vmatrix} e^{-x} & e^x \\ -e^{-x} & e^x \end{vmatrix} \\
&= (e^{-x})(e^x) - (-e^{-x})(e^x) \\
&= e^0 + e^0 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, las funciones son linealmente independientes, en esta parte del intervalo. Con lo que respecta al intervalo $[0, \infty)$:

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \begin{vmatrix} e^x & e^x \\ e^x & e^x \end{vmatrix} \\
&= (e^x)(e^x) - (e^x)(e^x) \\
&= e^{2x} - e^{2x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

En esta parte del intervalo las funciones son dependientes. Sin embargo, como se especificó en el criterio del Wronskiano, al existir al menos un punto donde las funciones son linealmente independientes, entonces existe la independencia lineal en el conjunto.

En el ejemplo anterior, si se tomase intervalos independientes se tendría en uno independencia y en otro dependencia; es decir, para el conjunto $\{e^{-x}, e^x\}$ las funciones son independientes; en cambio, el conjunto $\{e^x, e^x\}$ es dependiente.