Operadores Lineales en Espacios con Producto Interno

Definición y propiedades elementales del adjunto de un operador

Al combinar las transformaciones lineales y el producto interno en un espacio vectorial dado se encuentran diferentes tipos de operadores, que presentan propiedades útiles para diversas aplicaciones.

Sea un espacio vectorial V donde se define un producto interno $\langle \bar{u} | \bar{v} \rangle \ \forall \ \bar{u}, \bar{v} \in V$; y sean los operadores lineales $S: V \to V$ y $T: V \to V$. Debido a que las imágenes $S(\bar{u})$ y $T(\bar{v})$ son vectores de V, con ayuda del producto interno definido se puede obtener:

$$\langle S(\bar{u}) | \bar{v} \rangle = \alpha$$

$$\langle \bar{u} | T(\bar{v}) \rangle = \beta$$

Si $\alpha = \beta$, entonces $\langle S(\bar{u}) | \bar{v} \rangle = \langle \bar{u} | T(\bar{v}) \rangle$. Al operador T se le conoce como operador adjunto de S, y se denota como $T = S^*$; es decir,

$$\langle S(\bar{u}) | \bar{v} \rangle = \langle \bar{u} | S^*(\bar{v}) \rangle, \qquad \forall \ \bar{u}, \bar{v} \in V$$

El operador adjunto tiene propiedades importantes:

- ✓ $(S^*)^* = S$.
- ✓ Si S tiene inverso, entonces $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$.
- ✓ $(S^* + T^*) = (S + T)^*$.
- ✓ $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*, \forall \ \alpha \in \mathbb{C}$; $\bar{\alpha}$ es el conjugado de α.
- ✓ $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.
- ✓ Si $T^* = T$, se dice que el operador es autoadjunto.

Se debe hacer hincapié que S^* es único para todo S y depende del producto interno utilizado; es decir S sólo tiene un adjunto para cada producto interno definido.

Ejemplo 5.1. Sean el espacio vectorial $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, el producto interno definido $\langle A | B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B) \ \forall \ A, B \in M$ y el operador lineal $X: M \to M$ definido por

$$X \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & 3b \\ -3b & 2a + 2c \end{pmatrix}$$

Determínese el operador adjunto de X.

Primero se definen las matrices $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & c_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & c_2 \end{pmatrix} \in M$; entonces el operador adjunto es

$$\left\langle X\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & c_2 \end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & c_1 \end{pmatrix} \middle| X^*\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & c_2 \end{pmatrix}\right\rangle$$

Al aplicar las transformaciones se obtienen dos matrices, una de las cuales es desconocida. Por lo tanto, la definición de adjunto se reduce a

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 + c_1 & 3b_1 \\ -3b_1 & 2a_1 + 2c_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & c_2 \end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & c_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x & y \\ -y & z \end{pmatrix}\right\rangle$$

donde $X^*\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & z \end{pmatrix}$. Al aplicar el producto interno se llega a

$$\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} a_1 + c_1 & 3b_1 \\ -3b_1 & 2a_1 + 2c_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & c_2 \end{pmatrix}\right] = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & c_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x & y \\ -y & z \end{pmatrix}\right]$$
$$\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} a_1 + c_1 & -3b_1 \\ 3b_1 & 2a_1 + 2c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & c_2 \end{pmatrix}\right] = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & z \end{pmatrix}\right]$$
$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a_1a_2 + a_2c_1 + b_1b_2 & \dots \\ \dots & 3b_1b_2 + 2a_1c_2 + 2c_1c_2 \end{pmatrix} = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} a_1x + b_1y & \dots \\ \dots & b_1y + c_1z \end{pmatrix}$$
$$a_1a_2 + a_2c_1 + b_1b_2 + 3b_1b_2 + 2a_1c_2 + 2c_1c_2 = a_1x + b_1y + b_1y + c_1z$$

Al simplificar y factorizar los términos a_1, b_1, c_1 se obtiene

$$a_1a_2 + a_2c_1 + b_1b_2 + 3b_1b_2 + 2a_1c_2 + 2c_1c_2 = a_1x + b_1y + b_1y + c_1z$$
$$a_1(a_2 + 2c_2) + b_1(4b_2) + c_1(2c_2 + a_2) = a_1x + b_1(2y) + c_1z$$

Al igualar término a término se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1(a_2 + 2c_2) &= a_1x \\ b_1(4b_2) &= b_1(2y) \\ c_1(2c_2 + a_2) &= c_1z \end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene la solución $x = a_2 + 2c_2$, $y = 2b_2$ y $z = a_2 + 2c_2$. Por lo que el adjunto de X es

$$X^*\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 + 2c_2 & 2b_2 \\ -2b_2 & a_2 + 2c_2 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 5.2. Sea el operador lineal $D: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$D(x, y) = (x + y, y - x)$$

Determínese el operador D^* con el producto escalar ordinario y con el producto definido por

$$\langle \bar{u} | \bar{v} \rangle = 3x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + y_1y_2, \qquad \forall\, \bar{u} = (x_1, y_1), \bar{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Recurriendo a la definición del operador adjunto

$$\langle D(\bar{u}) | \bar{v} \rangle = \langle \bar{u} | D^*(\bar{v}) \rangle$$
$$\langle D(x_1, y_1) | (x_2, y_2) \rangle = \langle (x_1, y_1) | D^*(x_2, y_2) \rangle$$
$$\langle (x_1 + y_1, y_1 - x_1) | (x_2, y_2) \rangle = \langle (x_1, y_1) | (a, b) \rangle$$

Para el producto interno usual se tiene que

$$\begin{aligned}\langle(x_1+y_1,y_1-x_1)|(x_2,y_2)\rangle &= \langle(x_1,y_1)|(a,b)\rangle\\ (x_1+y_1)x_2+(y_1-x_1)y_2 &= ax_1+by_1\\ x_1x_2+y_1x_2+y_1y_2-x_1y_2 &= ax_1+by_1\\ (x_2-y_2)x_1+(x_2+y_2)y_1 &= ax_1+by_1\end{aligned}$$

donde $a=x_2-y_2$ y $b=x_2+y_2$. Finalmente se llega a $D^*(x,y)=(x-y,x+y)$

Con el producto interno propuesto se tiene que

$$\begin{aligned}\langle(x_1+y_1,y_1-x_1)|(x_2,y_2)\rangle &= \langle(x_1,y_1)|(a,b)\rangle\\ 3(x_1+y_1)x_2-(x_1+y_1)y_2-(y_1-x_1)x_2+(y_1-x_1)y_2 &= 3ax_1-bx_1-ay_1+by_1\\ 3x_1x_2+3y_1x_2-x_1y_2-y_1y_2-y_1x_2+x_1x_2+y_1y_2-x_1y_2 &= (3a-b)x_1+(-a+b)y_1\\ (4x_2-2y_2)x_1+(2x_2)y_1 &= (3a-b)x_1+(-a+b)y_1\end{aligned}$$

y se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{lcl} 4x_2-2y_2 & = & 3a-b\\ 2x_2 & = & -a+b\end{array}$$

que al resolverlo, da como solución a $3x_2-y_2=a$ y $5x_2-y_2=b$. Y el adjunto para este producto interno es $D^*(x,y)=(3x-y,5x-y)$.

Tomando en consideración una base ortonormal de un espacio vectorial también es posible encontrar al adjunto por medio de combinaciones lineales. Sea V un espacio vectorial con producto interno, $\bar{w}\in V$ y $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,\dots\bar{e}_n\}$ una base ortonormal de V. Se sabe que el vector $\bar{w}$ puede representarse como una combinación lineal de elementos de una base ortogonal por medio del producto interno; es decir,

$$\bar{w}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle\bar{w}|\bar{e}_i\rangle}{\langle\bar{e}_i|\bar{e}_i\rangle}\bar{e}_i$$

Como los vectores están normalizados, entonces el producto interno $\langle\bar{e}_i|\bar{e}_i\rangle$ es unitario; la expresión se simplifica a

$$\bar{w}=\sum_{i=1}^{n}\langle\bar{w}|\bar{e}_i\rangle\bar{e}_i \quad \dots(1)$$

Por otro lado, tomando en consideración que la imagen de cualquier vector de V bajo un operador adjunto es otro vector del mismo espacio, se puede expresar que

$$T^*(\bar{v})=\bar{w} \quad \dots(2)$$

Al sustituir (2) en (1) y utilizando la simetría del producto interno se obtiene

$$T^*(\bar{v})=\sum_{i=1}^{n}\langle T^*(\bar{v})|\bar{e}_i\rangle\bar{e}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{e}_i | T^*(\bar{v}) \rangle \bar{e}_i \ \ldots (3)$$

Finalmente, la definición de operador adjunto estipula que $\langle T(\bar{u}) | \bar{v} \rangle = \langle \bar{u} | T^*(\bar{v}) \rangle$; si $\bar{u}$ representa a cualquier vector de una base ortonormal, entonces la definición se reescribirá como

$$\langle T(\bar{e}_i) | \bar{v} \rangle = \langle \bar{e}_i | T^*(\bar{v}) \rangle \ \ldots (4)$$

y al sustituir (4) en (3) se llega a que

$$T^*(\bar{v}) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(\bar{e}_i) | \bar{v} \rangle \bar{e}_i$$

EJEMPLO 5.3. Sea el operador lineal del ejemplo 5.2 y el producto interno usual en $\mathbb{R}^2$. Por medio de una base ortonormal, obténgase el operador adjunto D^*.

Se partirá de la base $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$ y el vector genérico (x, y); la regla de correspondencia del operador es

$$D(x, y) = (x + y, y - x)$$

Tomando la definición anterior y sustituyendo la base y el vector se tiene que

$$\begin{aligned}
D^*(x, y) &= \left\langle D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \middle| (x, y) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left\langle D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \middle| (x, y) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \left\langle \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, 0 \right) \middle| (x, y) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left\langle \left(0, -\frac{2}{\sqrt{2}} \right) \middle| (x, y) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \left\langle \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, 0 \right) \middle| (x, y) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left\langle \left(0, -\frac{2}{\sqrt{2}} \right) \middle| (x, y) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} x \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{2}{\sqrt{2}} y \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
&= (x, x) - (y, -y)
\end{aligned}$$

Por lo que, $D^*(x, y) = (x - y, x + y)$ obtenido con anterioridad.

Una característica importante de los operadores adjuntos es que su matriz asociada se obtiene al transponer (y conjugar, en el caso de un espacio complejo) la matriz asociada del operador original.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, y B una de sus bases ortonormales. Si $T: V \to V$ es un operador lineal, entonces

$$M_B^B(T^*) = [M_B^B(T)]^*$$

donde $[M_B^B(T)]^*$ denota a la matriz transpuesta conjugada de $M_B^B(T)$.

Definición y propiedades elementales de operador normal

Sea V un espacio vectorial con producto interno, y sea T un operador lineal en V. Se dice que T es un operador normal si $T \circ T^* = T^* \circ T$. En términos de sus matrices asociadas

$$M_B^B(T)M_B^B(T^*) = M_B^B(T^*)M_B^B(T)$$

Esta relación entre las matrices asociadas es válida solamente cuando $M_B^B(T)$ esta referida a una base ortonormal B. Nótese que si dicha base está formada por vectores característicos de T, entonces la matriz asociada es diagonal; en conclusión, toda matriz diagonal es normal.

EJEMPLO 5.4. ¿Cuál de los siguientes operadores es normal?

$P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow P(a,b,c) = (a+b, a-b+c, b-c)$, con el producto interno usual.

$Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow Q(x,y) = (x-3y, 2y)$, con el producto interno definido por

$$\langle (x,y) | (a,b) \rangle = xa - xb - ay + 2yb$$

En ambos casos se necesita una base ortonormal con respecto al producto interno dado; así, se puede encontrar las matrices asociadas al operador lineal y a su adjunto, y probar que el producto entre ambas es conmutativo.

Para el operador P con el producto punto la base es $C = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Por lo que la matriz asociada es

$$M_C^C(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como es una matriz simétrica, su transpuesta es la misma matriz; por lo tanto, la matriz del operador adjunto es

$$M_C^C(P^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La naturaleza de la matriz indica que el producto entre las dos matrices siempre será conmutativo; en consecuencia, el operador es normal.

En el caso del operador Q, se necesita una base diferente a la canónica, puesto que el producto interno no es el usual. Dicha base es $B = \{(1,0), (1,1)\}$, que puede comprobarse es ortonormal. La matriz asociada para este segundo operador lineal es

$$M_B^B(Q) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz del operador adjunto será, entonces

$$M_B^B(Q^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Al realizar la multiplicación, y verificar la conmutación, se llega a

$$\begin{pmatrix}1 & -4\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\-4 & 2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1 & 0\\-4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4\\0 & 2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}17 & -8\\-8 & 4\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1 & -4\\-4 & 20\end{pmatrix}$$

Como el producto entre las matrices no conmuta, entonces el operador lineal Q no es normal.

Un operador normal presenta las siguientes propiedades:

- ✓ $\|T(\bar{v})\| = \|T^*(\bar{v})\|$.
- ✓ Si $T(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$, entonces $T^*(\bar{v}) = \bar{\lambda}\bar{v}$, donde $\bar{\lambda}$ es el conjugado de λ.
- ✓ Si λ_1 y λ_2 son dos valores propios asociados a T, entonces $E(\lambda_1)$ es ortogonal a $E(\lambda_2)$.

EJEMPLO 5.5. Se demostrarán las propiedades I y II enunciadas anteriormente.

En el primer caso, se tomará como base la definición de norma y adjunto de un operador lineal.

$$\begin{aligned}\langle T(\bar{v})|T(\bar{v})\rangle &= \langle \bar{v}|T^*[T(\bar{v})]\rangle\\ &= \langle \bar{v}|(T^*\circ T)(\bar{v})\rangle\\ &= \langle \bar{v}|(T\circ T^*)(\bar{v})\rangle\\ &= \langle \bar{v}|T[T^*(\bar{v})]\rangle\\ &= \langle \bar{v}|(T^*)^*[T^*(\bar{v})]\rangle\\ &= \langle T^*(\bar{v})|T^*(\bar{v})\rangle\end{aligned}$$

Para el segundo caso, ahora se utiliza el concepto de vector característico y las propiedades del producto interno en espacios complejos. Considerando a α como un valor propio de T^*

$$\begin{aligned}\langle T(\bar{v})|\bar{v}\rangle &= \langle \bar{v}|T^*(\bar{v})\rangle\\ \langle \lambda\bar{v}|\bar{v}\rangle &= \langle \bar{v}|\alpha\bar{v}\rangle\\ \lambda\langle \bar{v}|\bar{v}\rangle &= \bar{\alpha}\langle \bar{v}|\bar{v}\rangle\\ \lambda &= \bar{\alpha}\\ \bar{\lambda} &= \alpha\end{aligned}$$

Si el operador T estuviese definido sobre los números reales, entonces sus valores propios y los de su adjunto son los mismos.

Definición y propiedades elementales de operadores, y su representación matricial

El operador normal no es el único tipo de adjuntos que existen; otras variantes se relacionan con ciertos tipos especiales de matrices (simétricas, hermíticas, ortogonales, etc.) que al asociarlas a un operador lineal y un producto interno, se encuentra una colección de diferentes operadores adjuntos con vectores característicos muy particulares.

Operadores hermíticos y simétricos

Son casos especiales de los operadores normales. Su nombre lo obtienen con base en el tipo de matriz que se asocia al operador lineal. En términos de álgebra lineal se definen como:

$$T(\bar{v}) = T^*(\bar{v})$$

Lo cual también hace al operador autoadjunto. Sin embargo, se dice que un operador lineal es hermítico, si el espacio vectorial donde se define es complejo y su matriz asociada cumple que

$$\begin{aligned} M(T) &= \overline{M(T)}^T \\ &= [M(T)]^* \end{aligned}$$

Es decir, su matriz asociada es hermítica.

Cuando el operador lineal se define en un espacio vectorial real, y su matriz cumple que

$$M(T) = [M(T)]^T$$

Entonces se trata de un operador lineal simétrico.

EJEMPLO 5.6. Determínese la naturaleza del operador lineal (hermítico o no)

$$H(ax^2 + bx + c) = (a - ic)x^2 + (1 + i)cx + [ia + (1 - i)b]$$

bajo:

a. El producto interno

$$\langle \bar{p} | \bar{q} \rangle = \sum_{i=0}^{2} a_i \bar{b}_i \,, \qquad \forall\, \bar{p} = a_2x^2 + a_1x + a_0, \bar{q} = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

b. El producto interno

$$\langle \bar{p} | \bar{q} \rangle = \sum_{i=-1}^{1} p(i)\overline{q(i)}$$

Ambos definidos en el espacio vectorial complejo $P_2 = \{ax^2 + bx + c | a, b, c \in \mathbb{C}\}$.

En ambos casos es necesario obtener una base ortonormal, y verificar que la matriz asociada una matriz hermítica.

a. En este caso del primer producto interno se obtiene que una base ortonormal es $B = \{x^2, x, 1\}$. Al obtener su matriz asociada:

$$H(x^2) = x^2 + i, \qquad H(x) = 1 - i, \qquad H(c) = -ix^2 + (1 + i)x$$

$$\Rightarrow M_B^B(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1+i \\ i & 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

Se transpone y conjuga para obtener

$$M_B^B(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1-i \\ -i & 1+i & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$= \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1+i \\ i & 1-i & 0 \end{pmatrix}}^{T}$$

Lo cual es una matriz hermítica; por lo tanto, el operador lineal es hermítico bajo este producto interno.

b. La base ortonormal en este segundo caso es $C = \left\{x^2 - 1, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right\}$. Por lo tanto, la matriz asociada es

$$H(x^2 - 1) = (1-i)x^2 + (1+i)x + i, \qquad H\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}, \qquad H\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\right)$$

$$\Rightarrow M_C^C(H) = \begin{pmatrix} -i & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + i \\ 2+i & 1 & i \\ -i & 1 & i \end{pmatrix}$$

Al transponer y conjugar se llega a

$$\left[M_C^C(H)\right]^* = \begin{pmatrix} i & 2-i & i \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} - i & -i & -i \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz no es hermítica, y en consecuencia el operador lineal tampoco lo es.

Ejemplo 5.7. Determínese el valor de $\beta \in \mathbb{R}$ para que el operador lineal $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuya regla de correspondencia es $G(x,y) = (4x + (2+\beta)y, -4\beta x - 3y)$, sea simétrico bajo el producto interno

$$\langle (x,y) | (a,b) \rangle = 4xa + 2xb + 2ya + 2yb$$

Para obtener el valor buscado solo se requiere que la matriz asociada al operador sea simétrica; sin embargo, una de las restricciones es que la base utilizada sea ortonormal bajo el producto interno dado. Con base en esto, se puede comprobar que la base

$$B = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right)\right\}$$

cumple con la característica enunciada. Así,

$$G\left(\frac{1}{2}, 0\right) = (2, -2\beta)$$

$$G\left(\frac{1}{2}, -1\right) = (-\beta, -2\beta + 3)$$

Luego entonces, la matriz asociada buscada es

$$[(2, -2\beta)]_B = (4 - 2\beta, 2\beta), \qquad [(-\beta, -2\beta + 3)]_B = (-4\beta + 3, 2\beta - 3)$$

$$M_B^B(G) = \begin{pmatrix} 4-2\beta & -4\beta+3 \\ 2\beta & 2\beta-3 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz debe ser simétrica; la única forma para cumplir esa naturaleza es

$$\begin{aligned} 2\beta &= -4\beta + 3 \\ 6\beta &= 3 \\ \beta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Con este valor, se cumple la característica pedida para el operador lineal.

Operadores antihermíticos y antisimétricos

Este tipo de operadores, al igual que los anteriores, deben su nombre al tipo de su matriz asociada: antisimétrica (para espacios reales) o antihermítica (para espacios complejos); es decir, referida a una base B, la matriz asociada a un operador lineal T antihermítico (o antisimétrico) es

$$M_B^B(T) = -[M_B^B(T)]^*$$

Se debe recordar que las matrices antisimétricas son un caso especial de las matrices antihermíticas, especificando la naturaleza de los elementos que componen los triángulos y la diagonal principal de la matriz.

EJEMPLO 5.8. El operador lineal $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow G(a,b,c) = (-3b+c, 3a+2c, -a-2b)$ es antisimétrico bajo el producto interno usual. Se comprobará esta naturaleza utilizando la matriz asociada a G referida a la base canónica del espacio vectorial.

$$\begin{aligned} G(1,0,0) &= (0,3,-1) \\ G(0,1,0) &= (-3,0,-2) \qquad \Rightarrow \qquad M(G) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ G(0,0,1) &= (1,2,0) \end{aligned}$$

Claramente se observa que la matriz asociada calculada es antisimétrica.

EJEMPLO 5.9. En el espacio vectorial complejo $P_2 = \{ax^2 + bx + c | a,b,c \in \mathbb{C}\}$, el operador lineal

$$J(ax^2+bx+c) = -(ib+(1-i)c)x^2 - (ia-(2-3i)c)x + \big((1+i)a-(2+3i)b\big)$$

es antihermítico bajo el producto interno

$$\langle a_2x^2 + a_1x + a\_0 | b_2x^2 + b_1x + b_0 \rangle = \sum_{n=0}^{2} a_n b_n$$

Al obtener la matriz asociada al operador lineal referida a la base ortonormal $C = \{x^2, x, 1\}$, se observa que es antihermítica:

$$M_C^C(J) = \begin{pmatrix} 0 & -i & -1+i \\ -i & 0 & 2-3i \\ 1+i & -2-3i & 0 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, el operador lineal es antihermítico.

Operadores ortogonales y unitarios

Al igual que los operadores anteriores, los operadores unitarios y ortogonales reciben su nombre del tipo de matriz asociada que tienen. En este caso, nuevamente es necesario especificar el espacio vectorial al cual se hace referencia, para determinar si se trata del operador unitario o el caso especial de éste, el operador ortogonal.

Un operador T definido en un espacio vectorial complejo es unitario, si su matriz asociada a una base B cumple con

$$M_B^B(T)M_B^B(T^*) = M_B^B(I)$$
$$M_B^B(T)[M_B^B(T)]^* = I$$

El operador T será ortogonal, si está definido en un espacio vectorial real y su matriz asociada a la base C cumple con

$$M_C^C(T)M_C^C(T^*) = M_C^C(I)$$
$$M_C^C(T)\left[M_C^C(T)\right]^T = I$$

En este caso, la matriz asociada al operador adjunto es la inversa de la matriz asociada al operador original. En términos de transformaciones lineales, los operadores unitarios (u ortogonales) se representan como

$$T \circ T^* = T^* \circ T \quad \Rightarrow \quad I$$

EJEMPLO 5.10. Determínese el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que el operador lineal

$$V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow V(x,y,z) = k(x+2y+2z, 2x-2y+z, 2x+y-2z)$$

sea ortogonal bajo el producto interno usual.

El primer paso es encontrar la matriz asociada al operador referida a la base canónica.

$$M(V) = k\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Entonces, al transponer la matriz obtenida y realizar la multiplicación se llega a

$$\left[k\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right]\left[k\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right] = k^2\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es indicación de los valores que se han buscado:

$$9k^2 = 1$$

$$k^2 = \frac{1}{9}$$
$$k = \pm\frac{1}{3}$$

Ejemplo 5.11. Determínese si $K: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \Rightarrow K(x,y) = \frac{1}{\sqrt{3}}\big((1+i)x + iy, x - (1+i)y\big)$ es un operador lineal unitario bajo el producto interno usual.

La matriz asociada al operador, referida a la base canónica es

$$M(K) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+i & i \\ 1 & -1-i \end{pmatrix}$$

Al multiplicarla por la matriz asociada a su adjunto se obtiene

$$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+i & i \\ 1 & -1-i \end{pmatrix}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -i & -1+i \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El resultado es la matriz identidad; entonces, el operador propuesto es unitario.

Cabe destacar que los renglones (o columnas) de una matriz unitaria representan una base ortonormal en el producto interno utilizado.

Teorema espectral

Una de las aplicaciones más importantes de los operadores lineales en espacios con producto interno es el teorema espectral, el cual establece las características de la diagonalización de algunos operadores con base en la ortogonalidad.

Este teorema especifica lo siguiente:

Sea el espacio vectorial V, donde se define el producto interno $\langle \bar{u} | \bar{v} \rangle, \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in V$. El operador lineal $F: V \to V$ tiene una matriz asociada diagonal respecto a una base ortonormal, si F es autoadjunto.

En otras palabras, un operador autoadjunto siempre es diagonalizable y sus vectores propios siempre son ortogonales entre sí. Al aplicar la definición de autoadjunto, se establece que la matriz asociada es simétrica (en el campo $\mathbb{R}$) o hermítica (en el campo $\mathbb{C}$).

El nombre de teorema espectral viene dado por la descomposición en operadores (llamados espectros) asociados a cada uno de los valores propios. Esta asociación se logra con base en proyecciones de un vector genérico sobre cada uno de los espacios característicos.

Todos los operadores autoadjuntos presentan las características que se enuncian a continuación. Sea el operador lineal $F: V \to V$, con valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$.

- ✓ $F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \cdots + \lambda_n F_n$ (descomposición espectral).
- ✓ $I = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n$.
- ✓ $\langle F_i | F_j \rangle = 0, \forall\, i \neq j$.

donde el operador F_i es la proyección ortogonal del vector genérico $\bar{v} \in V$ sobre el espacio característico $E(\lambda_i)$.

EJEMPLO 5.12. Sea $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow F(x,y) = (x+2y, 2x+y)$ y el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^2$. Determínese si se trata de un operador diagonalizable. En caso afirmativo, obténgase la descomposición espectral.

Una base ortonormal respecto al producto punto es $C = \{(1,0),(0,1)\}$. Luego entonces, la matriz asociada al operador lineal referida a la base canónica es

$$M(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz es simétrica; entonces, el operador es autoadjunto y diagonalizable. Al obtener los valores característicos se llega a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)^2 - 4 \\ &= [(1-\lambda)-2][(1-\lambda)+2] \\ &= (-1-\lambda)(3-\lambda) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3 \end{aligned}$$

Se corrobora que el operador es diagonalizable, puesto que los valores propios son diferentes entre sí. Respecto a los espacios característicos,

$$E(-1) = \{(x,-x) | x \in \mathbb{R}\}, \qquad E(3) = \{(y,y) | y \in \mathbb{R}\}$$

Se observa que ambos espacios son ortogonales entre sí, respecto al producto escalar ordinario. Finalmente, la descomposición espectral se logra al realizar proyecciones sobre los subespacios obtenidos anteriormente.

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \lambda_1 F_1(x,y) + \lambda_2 F_2(x,y) \\ &= (-1)\,\mathrm{Proy}_{E(-1)}(x,y) + (3)\,\mathrm{Proy}_{E(3)}(x,y) \\ &= (-1)\frac{(x,y)\cdot(1,-1)}{(1,-1)\cdot(1,-1)}(1,-1) + (3)\frac{(x,y)\cdot(1,1)}{(1,1)\cdot(1,1)}(1,1) \\ &= -\frac{x-y}{2}(1,-1) + 3\frac{(x+y)}{2}(1,1) \\ F(x,y) &= -\frac{1}{2}(x-y,-x+y) + \frac{3}{2}(x+y,x+y) \end{aligned}$$

Esta última expresión es la descomposición espectral buscada.

Otra forma de encontrar la descomposición espectral de un operador reside en la propia diagonalización. Considérese que A es una matriz hermítica, y D es una matriz diagonal asociada a una base ortonormal de vectores propios $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_n\}$. Tomando el cuenta el proceso de diagonalización, la matriz diagonalizadora es

$$P = [\bar{b}_1^T \quad \bar{b}_2^T \quad \bar{b}_3^T \quad \cdots \quad \bar{b}_n^T]$$

y, por lo tanto

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ PDP^{-1} &= A \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que D contiene a los valores propios en el orden específico de la base B, y que por venir de una base ortonormal P es unitaria, la matriz A se puede reescribir como

$$[\bar{b}_1^T \quad \bar{b}_2^T \quad \bar{b}_3^T \quad \cdots \quad \bar{b}_n^T]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}[\bar{b}_1^T \quad \bar{b}_2^T \quad \bar{b}_3^T \quad \cdots \quad \bar{b}_n^T]^* = A$$

$$[\bar{b}_1^T \quad \bar{b}_2^T \quad \bar{b}_3^T \quad \cdots \quad \bar{b}_n^T]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\overline{\begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{bmatrix}} =$$

$$[\lambda_1\bar{b}_1^T \quad \lambda_2\bar{b}_2^T \quad \lambda_3\bar{b}_3^T \quad \cdots \quad \lambda_n\bar{b}_n^T]\overline{\begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{bmatrix}} =$$

$$\lambda_1\bar{b}_1^T\overline{\bar{b}_1} + \lambda_2\bar{b}_2^T\overline{\bar{b}_2} + \lambda_3\bar{b}_3^T\overline{\bar{b}_3} + \cdots + \lambda_n\bar{b}_n^T\overline{\bar{b}_n} = A$$

donde $\overline{\bar{b}_i}$ representa al conjugado del vector $\bar{b}_i$. La última expresión es la descomposición espectral en forma de matriz, que es equivalente a la descomposición de un operador lineal T, considerando que A está asociada a T.

EJEMPLO 5.13. Obténgase la descomposición espectral del operador lineal del ejemplo 5.12 a partir de su matriz asociada.

Para el operador F se tiene que

$$M(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \qquad E(-1) = \{(x, -x)|x \in \mathbb{R}\}, E(3) = \{(y, y)|y \in \mathbb{R}\}$$

Luego entonces, una base ortonormal de vectores propios es $B = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right\}$. Puesto que se está trabajando en un campo real, no es necesario el conjugado. La descomposición espectral es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -1)\right] + 3\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1)\right]$$
$$= -1\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right] + 3\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Al obtener las respectivas reglas de correspondencia (del operador F y sus operadores proyección)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(x + 2y, 2x + y) = -\frac{1}{2}(x - y, -x + y) + \frac{3}{2}(x + y, x + y)$$

que es el resultado del ejemplo 5.12.

EJEMPLO 5.14. Demuéstrese que un operador lineal autoadjunto puede descomponerse utilizando proyecciones ortogonales sobre sus espacios característicos (descomposición espectral).

Sean V un espacio vectorial de dimensión n con producto interno, $T: V \to V$ un operador lineal autoadjunto, $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ una base ortogonal de vectores propios de T asociados a los valores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, y $\bar{u} \in V$ un vector genérico.

El vector $\bar{u}$ puede expresarse como combinación lineal de los elementos de la base B; es decir,

$$\bar{u} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{v}_n$$

Como la base es ortogonal, entonces los escalares pueden expresarse como

$$\alpha_i = \frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_i \rangle}{\langle \bar{v}_i | \bar{v}_i \rangle}$$

es decir, la combinación lineal se reescribe como

$$\bar{u} = \frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_1 \rangle}{\langle \bar{v}_1 | \bar{v}_1 \rangle} \bar{v}_1 + \frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_2 \rangle}{\langle \bar{v}_2 | \bar{v}_2 \rangle} \bar{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_n \rangle}{\langle \bar{v}_n | \bar{v}_n \rangle} \bar{v}_n$$

Obsérvese que cada término de la combinación lineal es la proyección ortogonal de $\bar{u}$ sobre cada elemento de la base B. Al aplicar el operador lineal T a ambos lados, se obtiene

$$\begin{aligned} T(\bar{u}) &= T\left(\frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_1 \rangle}{\langle \bar{v}_1 | \bar{v}_1 \rangle} \bar{v}_1 + \frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_2 \rangle}{\langle \bar{v}_2 | \bar{v}_2 \rangle} \bar{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_n \rangle}{\langle \bar{v}_n | \bar{v}_n \rangle} \bar{v}_n \right) \\ &= \frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_1 \rangle}{\langle \bar{v}_1 | \bar{v}_1 \rangle} T(\bar{v}_1) + \frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_2 \rangle}{\langle \bar{v}_2 | \bar{v}_2 \rangle} T(\bar{v}_2) + \cdots + \frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_n \rangle}{\langle \bar{v}_n | \bar{v}_n \rangle} T(\bar{v}_n) \end{aligned}$$

Como los vectores de la base son característicos, por definición, se llega a

$$\begin{aligned} T(\bar{u}) &= \frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_1 \rangle}{\langle \bar{v}_1 | \bar{v}_1 \rangle} \lambda_1 \bar{v}_1 + \frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_2 \rangle}{\langle \bar{v}_2 | \bar{v}_2 \rangle} \lambda_2 \bar{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_n \rangle}{\langle \bar{v}_n | \bar{v}_n \rangle} \lambda_n \bar{v}_n \\ &= \lambda_1 \frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_1 \rangle}{\langle \bar{v}_1 | \bar{v}_1 \rangle} \bar{v}_1 + \lambda_2 \frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_2 \rangle}{\langle \bar{v}_2 | \bar{v}_2 \rangle} \bar{v}_2 + \cdots + \lambda_n \frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_n \rangle}{\langle \bar{v}_n | \bar{v}_n \rangle} \bar{v}_n \end{aligned}$$

Hasta este punto se hacen las siguientes consideraciones:

1. Cada proyección ortogonal se hace sobre el espacio característico $E(\lambda_i)$, puesto que el vector $\bar{v}_i$ es una base de dicho espacio. Si $E(\lambda_i)$ tuviese dimensión $m > 1$, entonces la base contendría a los vectores $\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_{i+m-1}$; en consecuencia, la proyección sería la agrupación de los términos que contengan a los vectores propios mencionados.

2. La proyección ortogonal puede considerarse como un operador lineal; es decir,

$$\frac{\langle \bar{u} | \bar{v}_i \rangle}{\langle \bar{v}_i | \bar{v}_i \rangle} \bar{v}_i = T_i(\bar{u})$$

Por lo tanto, el operador lineal puede escribirse como

$$T(\bar{u}) = \lambda_1 T_1(\bar{u}) + \lambda_2 T_2(\bar{u}) + \cdots + \lambda_n T_n(\bar{u})$$

que es la descomposición espectral de T.

EJEMPLO 5.15. Obténgase la descomposición espectral del operador lineal

$$S: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \Rightarrow S(x,y,z) = (x + (1+i)y, (1-i)x + 2y, z)$$

Utilizando el producto interno usual en el espacio vectorial dado, una base ortonormal es la base canónica; por lo tanto, la matriz asociada al operador es

$$M(S) = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como la matriz es hermítica, puede descomponerse espectralmente. Entonces, sus valores y vectores propios son

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1+i & 0 \\ 1-i & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(-3+\lambda)\lambda = 0$$

$$\begin{aligned} E(1) &= \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\} \\ E(0) &= \left\{\left(x, \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)x, 0\right) \middle| x \in \mathbb{R}\right\} \\ E(3) &= \left\{\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)y, y, 0\right) \middle| y \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

y al obtener las proyecciones sobre cada subespacio con la base orotonormal

$$B = \left\{(0,0,1), \sqrt{\frac{2}{3}}\left(1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 0\right), \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 1, 0\right)\right\}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} M(S) &= 1\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] + 0\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ 0 \end{pmatrix}\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & 0 \end{pmatrix}\right] + 3\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= 1\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\left[\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] + 3\left[\frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

Finalmente, la descomposición espectral es

$$\begin{aligned} S(x,y,z) &= (x + (1+i)y, (1-i)x + 2y, z) \\ &= (0,0,z) + 3\left(\frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i\right)y, \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\right)x + \frac{2}{3}y, 0\right) \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.16. Encuéntrese la descomposición espectral del operador lineal

$$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow T(x,y,z) = (-3x+2y-z, 2x-2z, -x-2y-3z)$$

Empezando el desarrollo con los valores y vectores propios, y las respectivas proyecciones sobre éstos últimos:

$$M(T) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -1 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32$$

Para $\lambda_1 = -4$

$$E(-4) = \{(x,y,x+2y) | x,y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow T_1(x,y,z) = \frac{x+z}{2}(1,0,1) + \frac{-x+y+z}{3}(-1,1,1)$$

Para $\lambda_2 = 2$

$$E(2) = \{(-z,-2z,z) | z \in \mathbb{R}\} \Rightarrow T_{2(x,y,z)} = \frac{-x-2y+z}{6}(-1,-2,1)$$

Finalmente la descomposición espectral es:

$$T(x,y,z) = (-4)\left(\frac{5x-2y+z}{6}, \frac{-x+y+z}{3}, \frac{x+2y+5z}{6}\right) + (2)\left(\frac{x+2y-z}{6}, \frac{2x+4y-2z}{6}, \frac{-x-2y+z}{6}\right)$$

Como puede observarse, el primer valor propio está asociado a un espacio de dimensión dos; esta es la razón por la cual el operador lineal solo tiene dos espectros.

Formas cuadráticas

En Álgebra y Geometría Analítica existe funciones que permiten representar lugares geométricos. Las funciones de interés en este tópico son las formas cuadráticas.

Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ es una expresión con n variables, coeficientes reales, de segundo grado y completamente homogéneo. Una expresión homogénea es aquélla donde todos sus términos tienen el mismo grado. Con esta definición, una forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ tiene la forma

$$f(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$$

Si se toma en cuenta la ecuación general de segundo, se observará que al suprimir los términos lineales y el término independiente, se tiene una forma cuadrática.

Representación matricial

Sea $\bar{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y el producto interno definido por $\langle \bar{u} | \bar{v} \rangle = \bar{u}A\bar{v}^T$, donde A es una simétrica de orden tres. Si se desarrolla la propiedad de positividad del producto interno, fácilmente se obtiene

$$\begin{aligned}(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} A & d & e \\ d & B & f \\ e & f & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= (Ax+dy+ez \quad dx+By+fz \quad ex+fy+Cz)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= Ax^2 + dxy + exz + dxy + By^2 + fyz + exz + fyz + Cz^2 \\ &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz\end{aligned}$$

$$= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$$

Lo que implica que una forma cuadrática siempre tendrá una representación matricial, con base en un producto interno y una matriz simétrica. Nótese que los coeficientes con términos mixtos son los valores de los triángulos de la matriz multiplicados por dos, y los coeficientes cuadráticos puros son los elementos de la diagonal principal.

Aplicación de los valores propios y los vectores propios de matrices simétricas a las formas cuadráticas

Como ya se mencionó, las formas cuadráticas están contenidas en la ecuación general de segundo grado; por lo tanto, dicha ecuación también tiene una representación matricial en términos de un producto interno.

La ecuación general de segundo para el espacio $\mathbb{R}^3$ en forma matricial será:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$
$$(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} A & d & e \\ d & B & f \\ e & f & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} G \\ H \\ I \end{pmatrix} + J = 0$$

Entonces, debido a que las ecuaciones de segundo grado representan los lugares geométricos, entonces es posible obtener una representación matricial de dichos lugares (ya sean curvas o superficies). La gran utilidad de esta representación es la rotación de ejes coordenados.

Se sabe que una curva (o superficie) de segundo grado con términos mixtos se encuentra en una posición oblicua a los ejes coordenados. Esto hace muy difícil su identificación, y es necesario rotar el sistema coordenado para analizar el lugar geométrico (véase la figura 5.1).

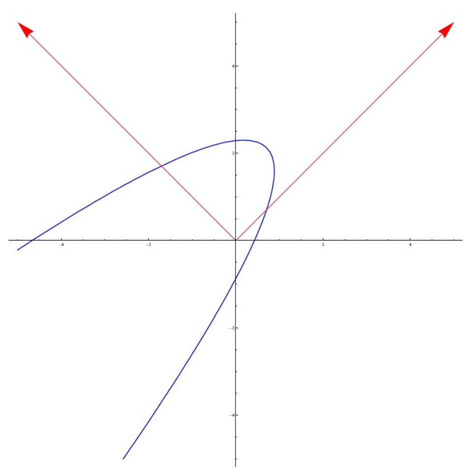

Figura 5.1. Rotación de ejes para analizar una parábola.

Existen dos caminos para lograr esa rotación de ejes coordenados: 1) por Geometría Analítica se utilizan las ecuaciones de rotación, la desventaja es el gran número de cálculos y reducciones a realizar; 2) por Álgebra Lineal utilizando la ecuación en forma matricial, que al ser una matriz simétrica implica que se puede diagonalizar y utilizar una matriz de transición para los términos lineales.

Al diagonalizar la matriz se obtendrá la parte cuadrática sin términos cruzados, lo cual implicará que las rectas trascendentales de la curva son paralelas a alguno de los ejes coordenados; en consecuencia, la curva será muy sencilla de analizar.

Algo muy importe es que los vectores propios normalizados serán los generadores del sistema coordenado rotado, y es sumamente importante tomar el orden apropiado para obtener el sistema y la curva correctos.

EJEMPLO 5.17. Determínese la ecuación sin términos mixtos de la curva

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 29 = 0$$

Además, calcúlese el ángulo de rotación del nuevo sistema de coordenadas.

La ecuación puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{aligned} (x \quad y)\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x \quad y)\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} + 29 &= 0 \\ \bar{u}A\bar{u}^T + \bar{u}C^T + 29 &= \end{aligned}$$

Para resolver el problema, se deben calcular sus valores propios de la matriz A. Por lo que,

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

de donde se obtienen $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 6$, cuyos vectores propios son, respectivamente:

$$E(\lambda_1) = \{(x, -2x) | x \in \mathbb{R}\}, \qquad E(\lambda_2) = \{(2y, y) | y \in \mathbb{R}\}$$

La base ortonormal de vectores propios que se utilizará es

$$B = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\}$$

Por lo que, siguiendo el concepto de similaridad de matrices, la ecuación de la curva quedará como

$$\bar{u}P^{-1}AP\bar{u}^T + \bar{u}P^{-1}C^T + 29 = 0$$

$$\begin{aligned} (x \quad y)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x \quad y)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} + 29 &= 0 \\ (x \quad y)\left(\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x \quad y)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\begin{pmatrix} -60 \\ 0 \end{pmatrix} + 29 &= \\ (x \quad y)\left(\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(-60x) + 29 &= \\ (x \quad y)\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(-60x) + 29 &= \\ 6x^2 + y^2 - 12\sqrt{5}x + 29 &= 0 \end{aligned}$$

que es la ecuación buscada. El ángulo de rotación es el mismo que el ángulo entre los vectores $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ y $(1, 0)$.

$$\cos\varphi = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(1,0)}{\left\|\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\|\|(1,0)\|}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$= 26.5651°$$

el cual es el ángulo buscado. La figura 5.2 muestra la cónica con la rotación y translación de los ejes coordenados.

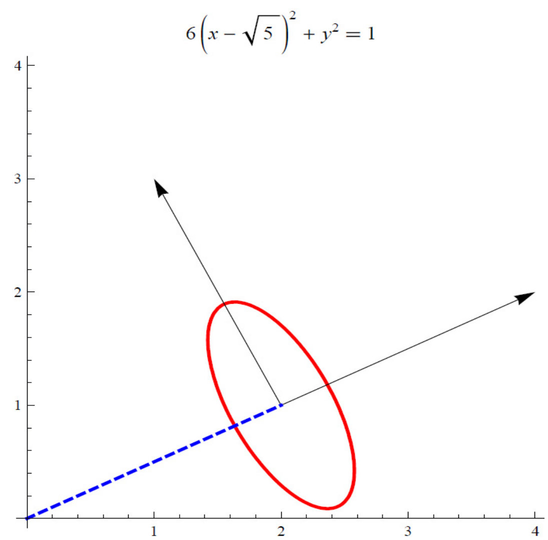

Figura 5.2. Rotación y traslación hasta el punto $C\left(\sqrt{5},0\right)$ del sistema $X'Y'$, donde se encuentra el centro de la elipse.

EJEMPLO 5.18. Determina la ecuación de la superficie S, en un sistema de coordenadas rectangular rotado $\frac{\pi}{6}$ hacia la derecha sobre el plano XY.

$$S:\ (x-1)^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$$

Al desarrollar la ecuación de la curva, se puede representarla como una ecuación matricial.

$$36x^2-9y^2-4z^2-72x=0$$
$$\begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}36 & 0 & 0\\ 0 & -9 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-72\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=$$

Para encontrar el cambio de coordenadas se necesitan las bases de cada sistema; es decir, la base canónica para el sistema actual, y la base de vectores propios ortonormales del nuevo sistema. Esa segunda base es

$$B=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),(0,0,1)\right\}$$

Utilizando la diagonalización de matrices, se plantea que $PDP^{-1}=A$. La matriz P está formada por los vectores de la base B dispuestos en columnas.

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}36 & 0 & 0\\ 0 & -9 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}18\sqrt{3} & -\frac{9}{2} & 0\\ -18 & -\frac{9}{2}\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}27-\frac{9}{4} & -9\sqrt{3}-\frac{9}{4}\sqrt{3} & 0\\ -9\sqrt{3}-\frac{9}{4}\sqrt{3} & 9-\frac{27}{4} & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

El cambio de base para los términos lineales se obtiene por

$$C=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-72\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-36\sqrt{3}\\ -36\\ 0\end{pmatrix}$$

La ecuación de la superficie en el nuevo sistema de coordenadas es

$$\begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{99}{4} & -\frac{45}{4}\sqrt{3} & 0\\ -\frac{45}{4}\sqrt{3} & \frac{9}{4} & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-36\sqrt{3}\\ -36\\ 0\end{pmatrix}=0$$

$$\frac{99}{4}x'^2-\frac{45}{4}\sqrt{3}x'y'-\frac{45}{4}\sqrt{3}x'y'+\frac{9}{4}y'^2-4z'^2-36\sqrt{3}x'-36y'=$$

$$11x'^2-10\sqrt{3}x'y'+y'^2-\frac{16}{9}z'^2-16\sqrt{3}x'-16y'=0$$

La superficie es un hiperboloide de dos ramas, el cual está orientado en forma oblicua al plano XY (véase la figura 5.3).

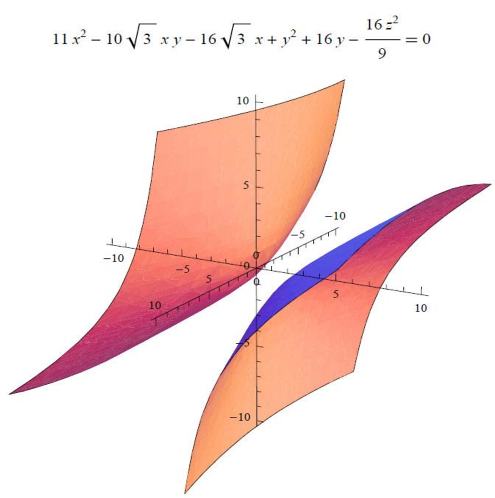

Figura 5.3. Rotación sobre el plano XY de un hiperboloide de dos mantos.

EJEMPLO 5.19. Determina qué tipo de superficie es denotada por la ecuación

$$-x^2+6xy-y^2+2z^2+4\sqrt{3}x+4\sqrt{2}y+2\sqrt{6}z+10=0$$

La ecuación puede reescribirse en forma matricial como

$$(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix}4\sqrt{3}\\ 4\sqrt{2}\\ 2\sqrt{6}\end{pmatrix}+10=0$$

Para comenzar se obtienen los valores y vectores propios de la matriz asociada a la forma cuadrática para obtener el cambio de coordenadas.

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 3 & 0\\ 3 & -1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-2)(-1)$$

y los vectores propios son

$$E\big(\lambda_{1,2}=2\big)=\{(x,x,z)|x,z\in\mathbb{R}\}$$

$$E(\lambda_3=-4)=\{(-y,y,0)|y\in\mathbb{R}\}$$

de donde se pueden formar varias bases base ortonormales. Independientemente de la base, la superficie no cambiará, sólo la ecuación que la representa; por lo tanto, puede utilizarse la base siguiente:

$$B=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{2\sqrt{6}}{6}\right)\right\}$$

Cualquier otra base ortonormal es válida, únicamente cambiarán los ángulos de rotación y el sentido del sistema coordenado. Entonces, se diagonaliza la matriz asociada a la forma cuadrática.

$$\left(\frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix}2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3}\\ -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0\\ -\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\left(\frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix}2\sqrt{3} & -3\sqrt{2} & -\sqrt{6}\\ 2\sqrt{3} & 3\sqrt{2} & -\sqrt{6}\\ 2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{6}\end{pmatrix}=$$

$$\left(\frac{1}{36}\right)\begin{pmatrix}2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3}\\ -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0\\ -\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\sqrt{3} & 12\sqrt{2} & -2\sqrt{6}\\ 4\sqrt{3} & -12\sqrt{2} & -2\sqrt{6}\\ 4\sqrt{3} & 0 & 4\sqrt{6}\end{pmatrix}=$$

$$\left(\frac{1}{36}\right)\begin{pmatrix}72 & 0 & 0\\ 0 & -144 & 0\\ 0 & 0 & 72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Para el cambio de base del vector de términos lineales se realiza la multiplicación de la matriz de transición de la base B a la base canónica.

$$\left(\frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix}2\sqrt{3} & -3\sqrt{2} & -\sqrt{6}\\ 2\sqrt{3} & 3\sqrt{2} & -\sqrt{6}\\ 2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\sqrt{3}\\ 4\sqrt{2}\\ 2\sqrt{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 6\\ 8\end{pmatrix}$$

Finalmente, la superficie puede reescribirse como

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + 10 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2x' & -4y' & 2z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + 2x' + 6y' + 8z' + 10 =$$

$$2x'^2 - 4y'^2 + 2z'^2 - 2x' + 6y' + 8z' + 10 =$$

La superficie puede determinarse reescribiendo su ecuación en forma canónica.

$$-\frac{\left(x' - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{15}{8}} + \frac{\left(y' - \frac{3}{4}\right)^2}{\frac{15}{16}} - \frac{(z' + 2)^2}{\frac{15}{8}} = 1$$

Debido a que los dos términos cuadráticos negativos tienen el mismo coeficiente, se concluye que la superficie es un hiperboloide de revolución de dos mantos con centro en el punto $C\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -2\right)$. La figura 5.4 muestra la superficioes en el sistema coordenado rotado.

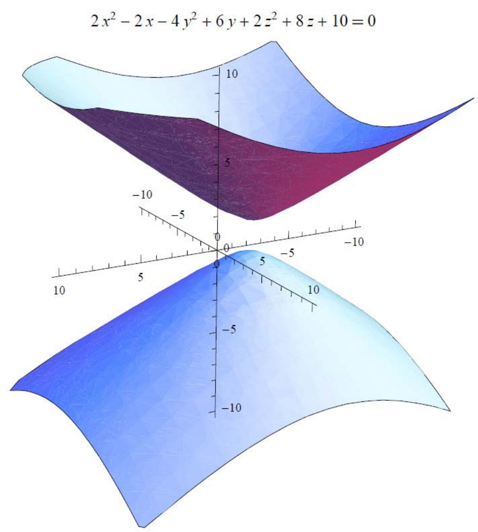

Figura 5.4. Hiperboloide de dos mantos.